

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський Політехнічний Інститут»**

**АДАШЕВСЬКА І. Ю.**

**ПРОБЛЕМИ  
КОНСТРУЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ  
В КОМП'ЮТЕРНИХ  
СИСТЕМАХ:  
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський політехнічний інститут»

**АДАШЕВСЬКА І. Ю.**

# **ПРОБЛЕМИ КОНСТРУЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ У КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ**

Конспект лекцій  
для підготовки докторів філософії зі спеціальностей «Комп'ютерні  
науки», «Прикладна механіка»

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 17.05.2019 р

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2019

УДК 044.92(075)  
А28

Рецензент: О. Ю. Ніцин, д-р техн. наук, проф. кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету НТУ «ХП»

**A28** Адашевська І.Ю.  
**Проблеми конструювання об'єктів в комп'ютерних системах: конспект лекцій** / І. Ю. Адашевська. — Харків: «НТМТ», 2019. — 72 с.  
ISBN 978-617-578-307-8

Конспект лекцій призначено для підготовки докторів філософії зі спеціальностей «Комп'ютерні науки», «Прикладна механіка».

Іл. 62. Табл. XX. Бібліограф. — 3 назв.

**УДК 044.92(075)**

**ISBN 978-617-578-307-8**

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

АДАШЕВСЬКА Ірина Юріївна

**Проблеми конструювання об'єктів в комп'ютерних системах**  
для підготовки докторів філософії зі спеціальностей Комп'ютерні науки,  
Прикладна механіка

За авторською редакцією

План 2019 р., поз. 147 .

Підписано до друку 17.05.2019 .Формат 60×84/16. Друк цифровий.  
Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк.  
Наклад 20 прим. Зам. № 12. Ціна договірна.

Видавництво “НТМТ”.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців ДК № 1748 від 15.04.2004 р.  
61072, м. Харків, вул. Дерев'янка, б. 16, к. 83.  
E-mail:jornal\_2016@ukr.net.

© Адашевська І. Ю.  
© НТУ «ХП», 2019

## Лекція 1.

### ТЕМА 1. Теоретичні основи методів конструювання та моделювання

#### 1.1. Моделювання як метод наукового пізнання

##### 1.1.1 Теоретичні основи моделювання

В даний час не можна назвати область людської діяльності, в якій в тій чи іншій мірі не використовувалися б методи моделювання. Особливо це відноситься до сфери управління різними системами, де основними є процеси прийняття рішень на основі отриманої інформації.

Гіпотези і аналогії, що відображають реальний, об'єктивно існуючий світ, повинні мати наочністю або зводитися до зручних для дослідження логічних схем; такі логічні схеми, що спрощують міркування і логічні побудови або дозволяють проводити експерименти, уточнюючі природу явищ, називаються моделями. Іншими словами, модель (лат. *Niodulus* — міра) — це об'єкт-заступник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу.

Моделювання — заміщення одного об'єкта іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі. Таким чином, моделювання може бути визначене як подання об'єкта моделлю для отримання інформації про цей об'єкт шляхом проведення експериментів з його моделлю. Теорія заміщення одних об'єктів (оригіналів) іншими об'єктами (моделями) і дослідження властивостей об'єктів на їх моделях називається теорією моделювання.

Визначаючи роль теорії моделювання, тобто її значення, необхідно, перш за все, відволіктися від наявного в науці і техніці різноманіття моделей і виділити те спільне, що притаманне моделям різних за своєю природою об'єктів реального світу. Це загальне полягає в наявності певної структури (статичної чи динамічної, матеріальної або уявної), яка подібна до структури даного об'єкта. У процесі вивчення модель виступає в ролі відносного самостійного квазіоб'єкта, що дозволяє отримати при дослідженні деякі знання про сам об'єкт.

Якщо результати моделювання підтверджуються і можуть служити основою для прогнозування процесів, що протікають в досліджуваних об'єктах, то говорять, що модель адекватна об'єкту. При цьому адекватність моделі залежить від мети моделювання і прийнятих критеріїв.

Узагальнено моделювання можна визначити як метод опосередкованого пізнання, при якому досліджуваний об'єкт-оригінал знаходиться в деякому відповідно до іншим об'єктом-моделлю, причому модель здатна в тому чи іншому відношенні заміщати оригінал на деяких стадіях пізнавального процесу.

Стадії пізнання, на яких відбувається така заміна, а також форми відповідності моделі і оригіналу можуть бути різними:

1. Моделювання як пізнавальний процес, що містить переробку інформації, що надходить із зовнішнього середовища, про що відбуваються в ній явища, в результаті чого в свідомості з'являються образи, відповідні об'єктам.

2. Моделювання, що полягає в побудові деякої системи-моделі (другий системи), пов'язаної певними співвідношеннями подоби з системою-оригіналом (першої системою), причому в цьому випадку відображення однієї системи в іншу є засобом виявлення залежностей між двома системами, відображеними у

співвідношеннях подоби , а не результатом безпосереднього вивчення інформації, що надходить.

Процес моделювання передбачає наявність об'єкта дослідження; дослідника, перед яким поставлено конкретне завдання; моделі, яка робиться отримання інформації про об'єкт і необхідної для вирішення поставленого завдання. Причому по відношенню до моделі дослідник є, по суті справи, експериментатором, тільки в даному випадку експеримент проводиться не з реальним об'єктом, а з його моделлю. Такий експеримент для інженера є інструмент безпосереднього вирішення організаційно-технічних завдань.

## **1.2. Використання моделювання при дослідженні та проектуванні складних систем**

Одна з проблем сучасної науки і техніки розробка та впровадження в практику проектування новітніх методів дослідження характеристик складних інформаційно-керуючих та інформаційно-обчислювальних систем різних рівнів (наприклад: автоматизованих систем наукових досліджень і комплексних випробувань, систем автоматизації проектування, комплексів і мереж, інформаційних систем). При проектуванні складних систем та їх підсистем виникають численні завдання, що вимагають оцінки кількісних і якісних закономірностей процесів функціонування таких систем, проведення їх структурного алгоритмічного і параметричного синтезу.

В дисципліні розглядаються системи інформатики та обчислювальної техніки, автоматизовані системи обробки інформації та управління, інформаційні системи відносяться до класу великих систем, етапи проектування, впровадження, експлуатації та еволюції яких в даний час неможливі без використання різних видів моделювання. На всіх перерахованих етапах для складних видів різних рівнів необхідно враховувати такі особливості:

- складність структури і стохастичність зв'язків між елементами, неоднозначність алгоритмів поведінки при різних умовах;
- велика кількість параметрів і змінних, неповноту і недетермінованість вихідної інформації;
- різноманітність й імовірнісний характер впливів зовнішнього середовища.

Обмеженість можливостей експериментального дослідження великих систем робить актуальною розробку методики їх моделювання, яка дозволила б у відповідній формі представити процеси функціонування систем, опис протікання цих процесів з допомогою математичних моделей, отримання результатів експериментів з моделями за оцінкою характеристики досліджуваних об'єктів. Причому на різних етапах створення і використання перерахованих систем для всього різноманіття входять до них підсистем застосування методу моделювання переслідує конкретні цілі, а ефективність методу залежить від того, наскільки грамотно розробник використовує можливості моделювання. Незалежно від розбиття конкретної складної системи на підсистеми при проектуванні кожної з них необхідно виконувати зовнішнє проектування (макропроектування) і внутрішнє проектування (мікропроектування). Так як на цих стадіях розробник переслідує різні цілі, то і використовувані при цьому методи і засоби моделювання можуть істотно відрізнятися.

На стадії макропроектування повинна бути розроблена узагальнена модель

процесу функціонування складної системи, що дозволяє розробнику отримати відповіді на питання про ефективність різних стратегій управління об'єктом при його взаємодії із зовнішнім середовищем. Стадію зовнішнього проектування можна розбити на аналіз і синтез.

При аналізі вивчають об'єкт управління, будують модель впливів зовнішнього середовища, визначають критерії оцінки ефективності, наявні ресурси, необхідні обмеження. Кінцева мета стадії аналізу - побудова моделі об'єкта управління для оцінки його характеристик.

При синтезі на етапі зовнішнього проектування вирішуються завдання вибору стратегії управління на основі моделі об'єкта моделювання, тобто складної системи.

На стадії мікропроектування розробляють моделі з метою створення ефективних підсистем. Причому використовуються методи і засоби моделювання залежать від того, які конкретно забезпечують підсистеми розробляються: інформаційні, математичні, технічні, програмні та т. п.

Вибір методу моделювання і необхідна деталізація моделей істотно залежать від етапу розробки складної системи. На етапах обстеження об'єкта управління, наприклад промислового підприємства, і розробки технічного завдання на проектування автоматизованої системи управління моделі в основному носять описовий характер і мають на меті найбільш повно представити в компактній формі інформацію про об'єкт, необхідну розробнику системи.

На етапах розробки технічного і робочого проектів систем моделі окремих підсистем деталізуються, і моделювання служить для вирішення конкретних задач проектування, тобто вибору оптимального за певним критерієм при заданих обмеженнях варіанту з безлічі допустимих. Тому в основному на цих етапах проектування складних систем використовуються моделі для цілей синтезу.

Цільове призначення моделювання на етапі впровадження і експлуатація складних систем - це програвання можливих ситуацій для прийняття обґрунтованих і перспективних рішень з управління об'єктом. Моделювання (імітацію) також широко застосовують при навчанні і тренуванні персоналу автоматизованих систем управління, обчислювальних комплексів і мереж, інформаційних систем в різних сферах. У цьому випадку моделювання носить характер ділових ігор. Модель, що реалізується зазвичай на ЕОМ, відтворює поведінку керованого об'єкта і зовнішнього середовища, а люди в певні моменти часу приймають рішення з управління об'єктом.

АСОІУ є системами, що розвиваються в міру еволюції об'єкта управління, появи нових засобів управління і т.п. Тому при прогнозуванні розвитку складних систем роль моделювання дуже висока, так як це єдина можливість відповісти на численні запитання про шляхи подальшого ефективного розвитку системи і вибору з них найбільш оптимального.

### **1.3. Перспективи розвитку методів і засобів моделювання систем в світлі нових інформаційних технологій**

В останні роки основні досягнення в різних областях науки і техніки нерозривно пов'язані з процесом вдосконалення ЕОМ. Сфера експлуатації ЕОМ — бурхливо розвивається галузь людської практики, яка стимулює розвиток нових теоретичних і прикладних напрямків. Ресурси сучасної інформаційно-обчислювальної



техніки дають можливість ставити і вирішувати математичні завдання такої складності, які в недавньому минулому здавалися нереалізованим, наприклад моделювання великих систем.

Історично першим склався аналітичний підхід до дослідження систем, коли ЕОМ використовувалася в якості обчислювача по аналітичним залежностям. Аналіз характеристик процесів функціонування великих систем за допомогою лише аналітичних методів дослідження наштовхується зазвичай на значні труднощі, що призводять до необхідності істотного спрощення моделей або на етапі їх побудови, або в процесі роботи з моделлю, що може призвести до отримання недостовірних результатів.

Тому в даний час поряд з побудовою аналітичних моделей велика увага приділяється завданням оцінки характеристик великих систем на основі імітаційних моделей, реалізованих на сучасних ЕОМ з високою швидкістю і великим об'ємом оперативної пам'яті. Причому перспективність імітаційного моделювання як методу дослідження характеристик процесу функціонування великих систем зростає з підвищенням швидкодії і оперативної пам'яті ЕОМ, з розвитком математичного забезпечення, вдосконаленням банків даних і периферійних пристроїв для організації діалогових систем моделювання. Це, в свою чергу, сприяє появі нових «чисто машинних» методів вирішення завдань дослідження великих систем на основі організації імітаційних експериментів з їх моделями.

Розширення можливостей моделювання різних класів великих систем нерозривно пов'язане з вдосконаленням засобів обчислювальної техніки і техніки зв'язку. Перспективним напрямком є створення для цілей моделювання ієрархічних багатомашинних обчислювальних систем і мереж.

Кінець XX століття ознаменувався інтенсивним розвитком і впровадженням інформатики в усі сфери життя суспільства. Це проявилось в інтенсивному вдосконаленні засобів обчислювальної техніки і техніки зв'язку, у появі нових і в подальшому розвитку існуючих інформаційних технологій, а також в реалізації прикладних інформаційних систем. Досягнення інформатики зайняли гідне місце в організаційному управлінні, в промисловості, в проведенні наукових досліджень і в автоматизованому проектуванні. Інформатизація охопила і соціальну сферу: освіту, науку, культуру, охорону здоров'я.

Стосовно до природничих і технічних наук прийнято розрізняти такі види моделювання:

- концептуальне моделювання, при якому сукупність вже відомих фактів або подань щодо досліджуваного об'єкта або системи тлумачиться за допомогою деяких спеціальних знаків, символів, операцій над ними або за допомогою природного або штучного мов;
- фізичне моделювання, при якому модель і модельований об'єкт є реальні об'єкти або процеси єдиної або різної фізичної природи, причому між процесами в об'єкті-оригіналі і в моделі виконуються деякі співвідношення подібності, що впливають з схожості фізичних явищ;
- структурно-функціональне моделювання, при якому моделями є схеми (блок-схеми), графіки, креслення, діаграми, таблиці, малюнки, доповнені спеціальними правилами їх об'єднання і перетворення;
- математичне (логіко-математичне) моделювання, при якому моделювання,

включаючи побудову моделі, здійснюється засобами математики і логіки;

- о імітаційне (програмне) моделювання, при якому логіко-математична модель досліджуваного об'єкта є алгоритм функціонування об'єкта, реалізований у вигляді програмного комплексу для комп'ютера.

Зрозуміло, перераховані вище види моделювання не є взаємовиключними і можуть застосовуватися при дослідженні складних об'єктів або одночасно, або в деякій комбінації. Крім того, в деякому сенсі концептуальне і, скажімо, структурно-функціональне моделювання невиразні між собою, так як ті ж блок-схеми, звичайно ж, є спеціальними знаками до встановлених операціями над ними.

#### **1.4. Методи моделювання та конструювання об'єктів**

Розробка програмного забезпечення — це складний процес, при якому враховуються різноманітні критерії якості. Наприклад, часто при конструюванні програмних об'єктів орієнтуються на підтримку еволюційного розширення коду в ході подальших доробок або повторне використання розроблених компонентів. Досягнення таких критеріїв визначається як використанням відповідної дисципліни програмування, так і застосуванням мовних і інструментальних засобів, орієнтованих на підтримку обраної парадигми.

Кожен із стилів програмування визначає своє бачення базових конструкцій і створених з них композицій. Наприклад, при розробці із застосуванням процедурного підходу програма розбивається на процедури і дані. Застосування об'єктно-орієнтованого програмування (ООП) веде до об'єднання процедур і даних в класи. Додаткова інструментальна підтримка в ООП успадкування та поліморфізму в поєднанні з дисципліною кодування, що спирається на пізніше зв'язування, підвищують гнучкість процесу розробки і забезпечують кращу, порівняно з процедурним підходом, підтримку еволюційного розширення коду і його повторного використання. Разом з тим слід зазначити, що методи розробки програмного забезпечення постійно розширюються, забезпечуючи інструментальну підтримку нових критеріїв, так,

Подібне різноманіття породжує інтерес до дослідження того, які методи і прийоми використовуються для конструювання програмних об'єктів в кожній з існуючих парадигм програмування. Наскільки ці методи відрізняються один від одного? Чи можна підходи, що застосовуються при побудові програм в одному стилі, успішно використовувати при іншому стилі програмування? Чи можна виділити узагальнені прийоми побудови програм і позиціонувати їх незалежно від мовних і інструментальних засобів? Відповіді на ці питання дозволять сформувати модель, що дозволяє описати методи конструювання понять, незалежно від їх семантичних особливостей.

Нижче проводиться аналіз методів конструювання програмних об'єктів, а сам процес конструювання сприймається як деякий узагальнений алгоритм, що складається з застосування операцій конструювання над базовими програмними об'єктами. Основною ідеєю є те, що, незважаючи на різноманітність парадигм і створених з їх допомогою програмних об'єктів, можна виділити ряд прийомів, що застосовуються для написання коду незалежно від використовуваного контексту. Це дозволить формалізувати погляд на процес конструювання і зафіксувати типові



прийоми, зв'язати їх з будь-якої з технологій розробки програмного забезпечення.

У загальному випадку під програмним об'єктом розуміється будь-яка конструкція незалежно від її семантичного значення. Поняття програмного об'єкта різняться в різних парадигмах і мовами програмування. У процедурному підході до них відносяться процедури і абстрактні типи даних. В об'єктно-орієнтованій парадигмі програмним об'єктом в загальному випадку є клас. У функціональній парадигмі основним програмним об'єктом є функція.

### **1.5. Способи опису процесу конструювання**

Для опису програмних об'єктів використовуються різноманітні моделі. Відомо, що найбільшою інформативністю володіють графічні уявлення. Серед них можна виділити діаграми Вірта, модель «сутність-зв'язок», діаграми класів. Всі ці методи дозволяють відобразити семантичну модель програми за допомогою набору графічних об'єктів і показати зв'язки між ними. Але існуючі моделі орієнтовані на зріз понять. Вони не відображають протікання самого процесу конструювання даних понять. Для вивчення цього процесу необхідно забезпечити опис його динаміки, що дозволить провести вивчення того, як програмні об'єкти створюються, видаляються і модифікуються в процесі написання коду.

Програмні об'єкти формуються на основі базових понять, з яких утворюються більш складні конструкції. При конструюванні виділяються різні варіанти відносин, серед яких можна виділити ієрархічні відносини і відносини на основі асоціацій. Ієрархічні відносини в мовах програмування реалізуються за рахунок вкладення одних об'єктів в інші. У свою чергу, асоціації - це посилавні відносини, при розробці програми такі відносини задаються у вигляді посилань, покажчиків і іменованих зв'язків.

Для підтримки еволюційного розширення коду зміни вносяться в додатковий файл, який зазвичай об'єднується воедино з уже існуючою конструкцією за рахунок спільності імен або покажчиків в комбінації з додатковими операціями, що забезпечують динамічне зв'язування в ході виконання програми. У цьому випадку вихідний файл може не модифікуватися, а остаточне формування єдиної програми здійснюється за рахунок використання спеціальних інструментальних засобів (наприклад, препроцесора і компоновника) або додаткового коду, спеціально для цього написаного програмістом.

У різних мовах програмування широко застосовуються різноманітні форми деревовидних структур: структури в C, класи в C ++, списки в Lisp і т.д. Побудовування ієрархічних відносин між об'єктами є першою спробою при їх систематизації, а тому цей спосіб представлення даних найбільш простий в освоєнні і розумінні. Як підтвердження можна привести структуру типів і класів мови програмування (рис. 1.1).

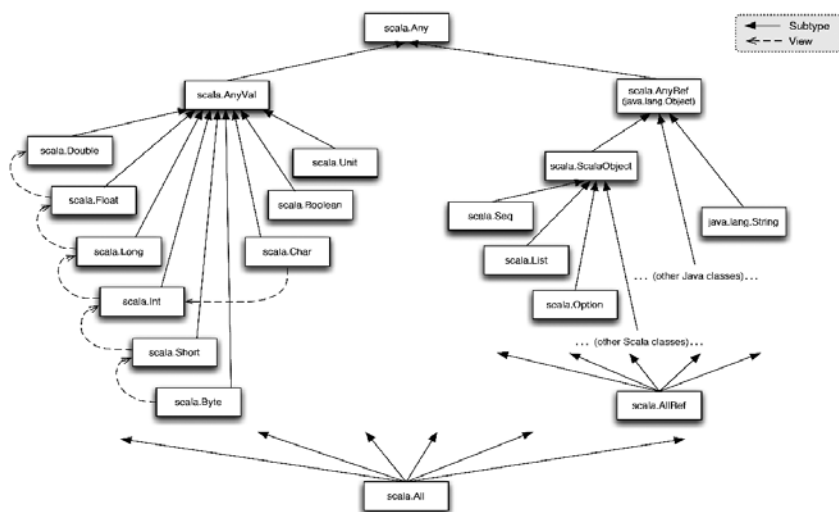


Рисунок 1.1. Ієрархія класів мови програмування Scala

Алгоритм створення моделі програмного об'єкта:

1. Вибирається за деяким критерієм безліч однотипних об'єктів;
2. Виділяється загальна та специфічна частини в інтерфейсі і логіці роботи безлічі виділених об'єктів;
3. Загальна частина приймається за правило за замовчуванням і інтегрується в генератор моделі в якості постійної і незмінної частини;
4. Специфічна частина параметризується таким чином, щоб вона могла визначати вид будь-якого програмного об'єкта з безлічі.

Властивості моделі програмного об'єкта:

- спрощеність. Використання моделі об'єкта простіше самого об'єкта, в тому сенсі, що програмісту не потрібно піклуватися про «типовою» частину об'єкта, яка прийнята за правило за замовчуванням;
- достатність. Незважаючи на всі умовчання, модель володіє достатньою гнучкістю для опису необхідних об'єктів;
- масовість. Модель програмного об'єкта дозволяє описати не один конкретний об'єкт, а цілий набір однотипних програмних об'єктів;
- підвищений рівень абстракції. Використання моделі об'єкта надає програмісту більш високий рівень абстракції;
- параметризованість, що дозволяє використовувати різні складні автовичислення і замовчування.

## 1.5 Системи комп'ютерного проектування і моделювання

Процес проектування та моделювання як засіб пізнання дійсності складається з трьох великих етапів:

- розробки математичної моделі і аналізу розробленої моделі;
- вибору методу рішення і побудови обчислювальної установки по обраній технології рішення;

- проведення обчислювального експерименту (обробка і візуалізація результатів експерименту) і виявлення закономірностей поведінки реального об'єкта, явища або процесу.

У галузі проектування та моделювання реальних об'єктів умовно виділилися чотири напрямки: моделювання динамічних систем, дискретно-подієвого моделювання, агентне моделювання і системна динаміка.

Відповідно до даних напрямками розробляються системи комп'ютерного проектування і моделювання, які умовно можна поділити на системи комп'ютерної математики, технічного, графічного і імітаційного моделювання (рис. 1.2). Усі ці системи розвиваються, вносяться доповнення, і розробники цих систем пропонують нові модернізовані версії. Вивчити в повній мірі всі технології досить складно, однак знати про ці інформаційних системах і вміти використовувати у своїй професійній діяльності деякі з них є необхідною умовою компетентності фахівця у відповідній галузі знань.

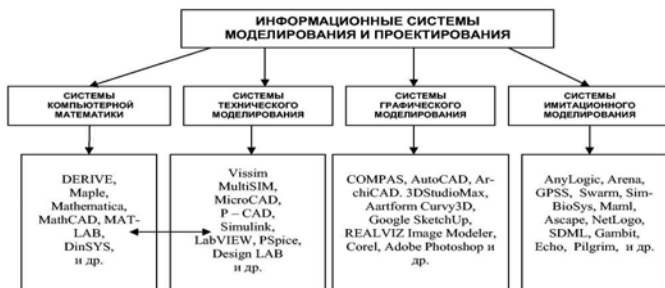


Рисунок 1.2. Умовна класифікація інформаційних систем за типом розв'язуваних задач

## Лекція 2

### ТЕМА 2. Цілі і завдання математичного моделювання процесів і систем

#### 2.1 Поняття «Математична модель»

Математичне моделювання дозволяє до створення реальної системи (об'єкта) або виникнення реальної ситуації розглянути можливі режими роботи, вибрати оптимальні керуючі впливи, скласти об'єктивний прогноз майбутніх станів системи.

Обчислювальні експерименти, що проводяться на основі математичних моделей, допомагають побачити за приватним загальне, розвинути універсальні методи аналізу об'єктів різної фізичної природи, пізнати властивості досліджуваних процесів і систем.

Нарешті, математичне моделювання є основою інтенсивно розробляються автоматизованих систем проектування, управління та обробки даних.

Основна задача математичного моделювання — виділення законів в природі, суспільстві і техніці і запис їх на мові математики.

наприклад:

1) Залежність між масою тіла  $m$ , що діє на нього силою  $F$  і прискоренням його руху  $a$  записується в формі 2-го закону Ньютона:  $F = m \cdot a$ ;

2) Залежність між напругою в електричному ланцюзі  $U$ , її опором  $R$  і силою струму  $I$  записується у вигляді закону Ома:  $I = U / R$ .

Існує безліч визначень математичної моделі.

Наведемо одне з них:

математичною моделлю деякого об'єкту, процесу або явища будемо називати запис його властивостей на формальній мові з метою отримання нового знання (властивостей) про досліджуваному процесі шляхом застосування формальних методів.

Альтернативою формальному (математичного) підходу є експериментальний підхід. До його недоліків можна віднести:

1) висока вартість підготовки та проведення експериментів;

2) отримання приватного знання (знання про конкретний об'єкт дослідження, а не про клас об'єктів).

Наприклад, нехай потрібно визначити вплив  $x$  на певний процес або об'єкт, при якому його результуюча характеристика  $y$  має максимально можливе значення (рис. 2.1).

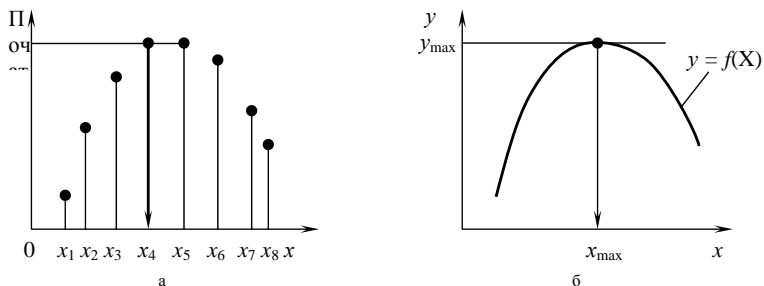


Рисунок. 2.1.

На рис. 2.1. а) показаний емпіричний (експериментальний) підхід до вирішення поставленого завдання, який полягає в експериментальному визначенні значення параметра  $y$  для кількох значень вхідного впливу  $x$ . Серед них знайдено найбільше, і воно приймається за максимум. Як бачимо з цього малюнка, можливо кілька значень

впливу  $x$  ( $x_4$  і  $x_5$ ), При яких  $y$  має найбільше значення, але жодне з них не є справжнім максимумом, який, можливо, лежить між ними.

Математичний підхід (рис. 2.1. б) передбачає наявність математичної моделі процесу типу  $y = f(X)$ . взявши похідну  $\frac{df}{dx}$  і прирівнявши її до нуля, отримаємо рівняння, рішенням якого є точне значення  $x_{\max}$ , при якій досягається максимум функції  $y$ .

Схема застосування математичної моделі при вирішенні реальних завдань має вигляд, показаний на рис. 2.2.

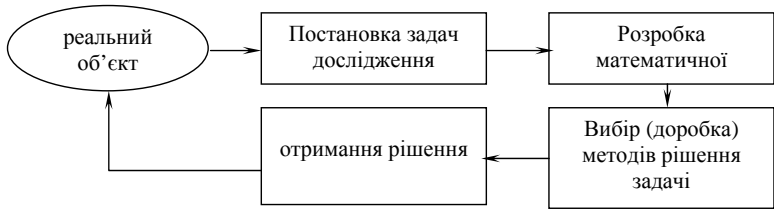


Рисунок 2.2

*Модель складного об'єкта (процесу, системи) не може бути простою. З чого випливає, що процес використання математичних моделей реальних систем є ітераційним процесом, коли послідовно уточнюються (допрацьовується) математична модель і методи вирішення поставлених завдань.*

Найважливішою характеристикою моделей є їх точність, адекватність дійсності. При цьому важливо мати на увазі, що всі моделі являють собою наближений опис реальних об'єктів (процесів) і тому принципово неточні. Інтегральна оцінка моделі може бути отримана шляхом порівняння результатів моделювання і експериментальних даних для конкретних об'єктів або режимів.

Для оцінки значущості збігу або розбіжності модельних і експериментальних результатів широко використовуються методи математичної статистики. Разом з тим не слід переоцінювати результати такої перевірки. Гарний збіг модельних та експериментальних даних, взагалі кажучи, не доводить точності моделі, а лише підтверджують її функціональну придатність для моделювання. Завжди може бути запропонована модель, що забезпечує краще збіг з експериментом, але не кращий опис модельованого об'єкта або процесу.

## 2.2 Класифікація математичних моделей

Існує кілька схем класифікації математичних моделей. Всі вони досить умовні. Одна з таких схем приведена на рис. 2.3.

Всі математичні моделі по використаному формальному мові можна розбити на аналітичні й імітаційні.

Аналітичні — моделі, в яких використовується стандартний математичний мову. Імітаційні — моделі, в яких використаний спеціальний мова моделювання або універсальна мова програмування.

Аналітичні моделі можуть бути записані у вигляді формул або рівнянь. Якщо який-небудь процес не може бути описаний у вигляді аналітичної моделі, його описують за допомогою спеціального алгоритму або програми. Така модель є імітаційної.



Рисунок 2.3

Аналітичні моделі в свою чергу розбиваються на теоретичні та емпіричні моделі. Теоретичні моделі відображають реальні структури і процеси в досліджуваних об'єктах, тобто, спираються на теорію їх роботи. Емпіричні моделі будуються на основі вивчення реакцій об'єкта на зміну умов навколишнього середовища. При цьому теорія роботи об'єкта не розглядається, сам об'єкт являє собою так званий «чорний ящик», а модель — деяку інтерполяційну залежність. Емпіричні моделі можуть бути побудовані на основі експериментальних даних. Ці дані отримують безпосередньо на досліджуваних об'єктах або за допомогою їх фізичних моделей.

За формою опису аналітичні моделі поділяються на лінійні і нелінійні.

Якщо всі вхідні в модель величини не залежать від часу, то маємо статичну модель об'єкта або процесу, в іншому випадку отримуємо динамічну модель.

У детермінованих моделях всі взаємозв'язки, змінні і константи задані точно, що призводить до однозначного визначення результуючої функції. Якщо частина або всі параметри, що входять в модель за своєю природою є випадковими величинами або випадковими функціями, то модель відносять до класу стохастичних моделей. В стохастичних моделях задаються закони розподілу випадкових величин, що призводить до ймовірнісної оцінкою результуючої функції.

Якщо аналітичне дослідження може бути доведено до кінця, моделі називаються аналітично можна вирішити. В іншому випадку говорять про чисельно вирішуваних аналітичних моделях.



## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ЛЕКЦІЇ 2

1. Що дозволяє здійснити математичне моделювання до створення реальної системи, об'єкта?
2. Що дозволяють побачити обчислювальні експерименти?
3. Сформулюйте основне завдання математичного моделювання.
4. Дайте визначення математичної моделі.
5. Який підхід вирішення наукових завдань є альтернативним математичного моделювання?
6. Перерахуйте основні недоліки експериментального підходу.
7. Що є найважливішою характеристикою математичної моделі?
8. На які два види діляться математичні моделі?
9. Перерахуйте види аналітичних математичних моделей.
10. Дайте коротку характеристику видів моделей.

## Лекція 3

### 2.3. Геометричне уявлення математичних моделей

Геометрично математична модель може бути представлена як деяка поверхню відгуку, відповідна розташуванню точок  $W = W(x)$  в  $k$ -вимірному факторному просторі  $X$ .

Наочно можна уявити собі тільки одновимірну і двовимірну поверхні відгуку, причому в останньому випадку зручно користуватися топографічним способом зображення рельєфу поверхні за допомогою ліній рівня (ізоліній), побудованих в двовимірному факторному просторі  $X$  (рис. 2.4).

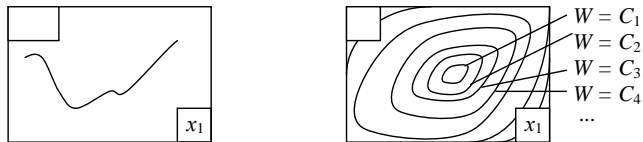


Рисунок 2.4

Область, в якій визначена поверхню відгуку, називається областю визначення  $X^*$ .

Ця область становить, як правило, лише частина повного факторного простору  $X$  ( $X^* \subset X$ ) і виділяється за допомогою обмежень, накладених на керуючі змінні  $x_i$ , записаних у вигляді рівності

$$x_i = C_i, i = 1, \dots, m;$$
$$f_j(X) = C_j, j = 1, \dots, l$$

або нерівностей

$$x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}, i = 1, \dots, k;$$
$$f_j(X) \leq C_j, j = 1, \dots, n,$$

При цьому функції  $f_j(x)$  можуть залежати як одночасно від всіх змінних, так і від деякої їх частини.

Обмеження типу нерівностей характеризують або фізичні обмеження на процеси в досліджуваному об'єкті (наприклад, обмеження температури), або технічні обмеження, пов'язані з умовами роботи об'єкта (наприклад, гранична швидкість різання).

Можливості дослідження моделей істотно залежать від властивостей (рельєфу) поверхні відгуку, зокрема, від кількості наявних на ній «вершин» і її контрастності.

Кількість вершин (западин) визначає модальність поверхні відгуку.

Якщо в області визначення на поверхні відгуку є одна вершина (западина), модель називається унімодальною.

Характер зміни функції при цьому може бути різним (рис. 2.5).

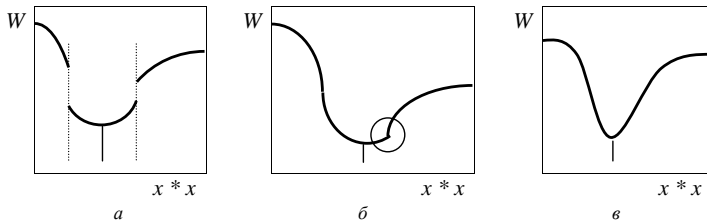


Рисунок 2.5

Модель може мати розриви першого роду (рис. 2.5. а). Безперервна унімодальна модель може мати точки розриву похідної — розриви другого роду (рис. 2.5. б). На рис. 2.5 в показана безперервно-диференційована унімодальна модель.

Для всіх трьох випадків, представлених на рис. 2.5, виконується загальна вимога унімодальності:

Якщо  $W(x^*) = \text{extr}W$ , то з умови  $x_1 < x_2 < x^* (x_1 > x_2 > x^*)$  слід  $W(x_1) < W(x_2) < W(x^*)$ , якщо  $\text{extr}$  — максимум, або  $W(x_1) > W(x_2) > W(x^*)$ , якщо  $\text{extr}$  — мінімум, тобто, в міру віддалення від екстремальної точки значення функції  $W(x)$  у безперервний спосіб падає (зростає).

Поряд з унімодальними бувають полімодальні моделі (рис. 2.6).

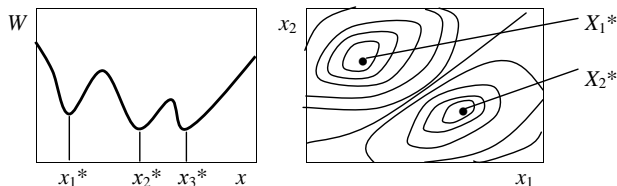


Рисунок 2.6

Іншою важливою властивістю поверхні відгуку є її контрастність, що показує чутливість результуючої функції до зміни факторів. Контрастність характеризується величинами похідних. Продемонструємо характеристики контрастності на прикладі двовимірної поверхні відгуку (рис. 2.7). Точка а розташована на «схилі», що характеризує рівну контрастність по всім змінним  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ); точка б розташована в «яру», в якому різна роздільна здатність різних змінних (маємо погану обумовленість функції); точка в розташована на «плато», на якому низька контрастність по всім змінним  $x_i$  говорить про близькість екстремуму.

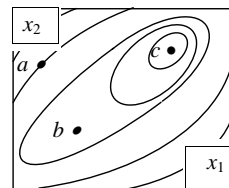


Рисунок 2.7

### Контрольні питання до лекції 3

1. У вигляді чого може бути представлена математична модель геометрично?
2. Що таке область визначення математичної моделі?
3. Яка модель називається унімодальною?
4. Як задаються математичні моделі аналітичного типу?
5. Наведіть приклад математичної моделі аналітичного типу.
6. Які завдання дозволяє вирішити модель, задана в явному вигляді?

## лекція 4

### ТЕМА. 3 Теоретичні математичні моделі аналітичного типу

*Найпростіші аналітичні моделі можуть бути задані явно в вигляді функції однієї або кількох змінних.*

Зазвичай у вигляді функцій задаються загальні закони природи або загальні закономірності, отримані в результаті інтегрування диференціальних рівнянь. Прикладом такої моделі може служити знаменита формула К.Е. Цюлковського:

$$\Delta v_{\text{ла}} = v \ln \frac{M_0}{M_k}, \quad (3.1)$$

визначальна збільшення швидкості ракети  $\Delta v_{\text{ла}}$  при імпульсному спалюванні палива через швидкість витікання робочого тіла  $v$  і відношення початкової  $M_0$  і кінцевої  $M_k$  мас ракети.

Модель, задана в явному вигляді, дає вичерпний опис досліджуваного об'єкта. Вона дозволяє побудувати залежність його характеристик від керуючих факторів, взяти похідні і знайти екстремуми моделі, визначити характеристики моделі в околиці екстремумів і т.д.

Дуже зручна графічна інтерпретація таких моделей. Однак моделі у вигляді формул можуть бути розроблені тільки для дуже простих об'єктів.

#### 3.1 Лінійні математичні моделі

Найбільш простими є так звані лінійні детерміновані моделі. Вони задаються у вигляді лінійної форми керуючих змінних ( $x$ ):

$$W = a_0 + A_1 x_1 + \dots + a_k x_k$$

при лінійних обмеженнях виду

$$b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2 + \dots + b_{kj} x_k \geq b_j, \quad j = 1, \dots, q_1;$$

$$c_{1j} x_1 + c_{2j} x_2 + \dots + c_{kj} x_k = c_j, \quad j = 1, \dots, q_2;$$

$$d_{1j} x_1 + d_{2j} x_2 + \dots + d_{kj} x_k \leq d_j, \quad j = 1, \dots, q_3.$$

Загальна кількість обмежень  $m = q_1 + q_2 + q_3$  може перевершувати число змінних ( $m > k$ ). Крім того, зазвичай вводиться умова позитивності змінних ( $x_i \geq 0$ ).

Поверхня відгуку для лінійної моделі являє собою гіперплощина. Наприклад, розглянемо лінійну модель двох змінних такого вигляду:

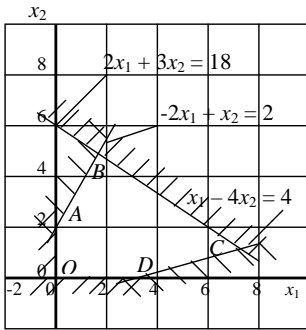
$$W = -2x_1 - 3x_2 \quad (3.2)$$

при наступних обмеженнях

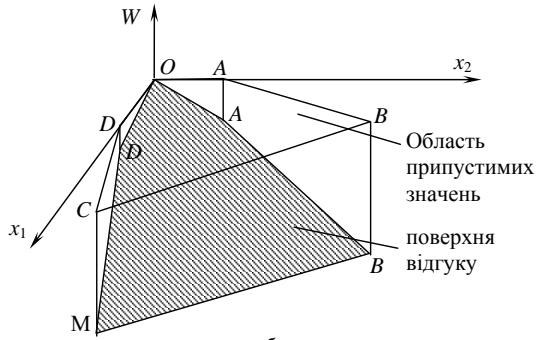
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 18; \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4; \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Область допустимих значень (область визначення) OABCD для моделі (3.2) утворена обмеженнями (3.3) (рис. 3.2). Поверхня відгуку являє собою плоский багатокутник OA'B'C'D' (рис. 3.2, б).



а



б

Рисунок 3.2

При певному співвідношенні обмежень безліч допустимих рішень може бути відсутнім (порожньо). Приклад такого безліччя показаний на рис. 3.3. Прямі AC і BC обмежують область допустимих значень зверху. Третє обмеження відсікає область допустимих значень знизу від прямої AB. Таким чином, загальною області, що задовольняє всім трьом обмеженням, немає.

Лінійні моделі досить прості і тому, з одного боку, припускають істотне спрощення задачі, а з іншого — допускають розробку простих і ефективних методів вирішення.

При дослідженні ДЛА лінійні моделі використовуються рідко і майже виключно при наближеному описі завдань.

Лінійні моделі можуть використовуватися при поетапній апроксимації нелінійних моделей (лінеаризація завдання). Особливо ефективний цей прийом при вивченні невеликих областей досліджуваного простору. Подання окремих ділянок нелінійної поверхні відгуку лінійною моделлю лежить в основі великої групи методів оптимізації, так званих методів з лінійної тактикою.

Дослідження лінійних моделей не становить труднощів. Зокрема вплив кожної з змінних на характеристики моделі виду

$$W = a_0 + A_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$$

задається її коефіцієнтами:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = a_i, i = 1, \dots, k.$$

Для знаходження оптимуму лінійної моделі  $W_{\text{опт}}$  розроблено ефективний симплекс-метод.

До лінійним іноді зводяться найпростіші моделі вартості, що розглядаються як сукупність вироблених витрат.

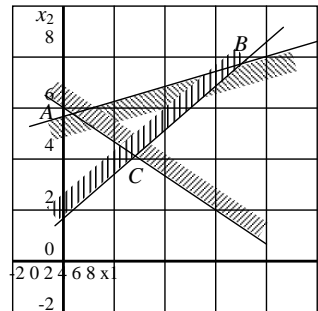


Рисунок 3.3

Прикладом такої моделі є класична модель вартості перевезень (транспортна задача) (рис. 3.4).

Є  $k$  пунктів виробництва ( $i = 1, \dots, k$ ) і  $m$  пунктів споживання ( $j = 1, \dots, m$ ) деякого продукту. Кількість продукту, виробленого в кожному з  $k$  пунктів виробництва, так само  $a_i$ ; кількість продукту, необхідного в кожному з  $m$  пунктів споживання, так само  $b_j$ .

Передбачається рівність загального виробництва і споживання:

$$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

Кількість продукту, що перевозиться з  $i$ -го пункту виробництва в  $j$ -й пункт споживання, так само  $x_{ij}$ ; вартість перевезення одиниці цього продукту —  $c_{ij}$ .

Сумарна вартість перевезень  $Z_{\Sigma}$  задається лінійною моделлю:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

при наступних обмеженнях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0.$$

До лінійним також відносяться моделі у вигляді лінійних диференціальних рівнянь (звичайних або в приватних похідних).

Лінійне звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку має вигляд

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t). \quad (3.4)$$

Початкові умови записуються як

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1, \quad x''(0) = C_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = C_{n-1}.$$

Лінійне диференціальне рівняння в приватних похідних має вигляд

$$a_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_2} + \dots + a_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} = f(x_1, x_2, \dots, x_k, t).$$

Модель, задана у вигляді диференціального рівняння в приватних похідних, включає початкові і граничні умови (умови на кордоні області визначення функції  $\Phi(T)$ ).

### 3.2 Нелінійні детерміновані моделі

Нелінійні детерміновані моделі мають більший точністю і гнучкістю. Вони можуть бути задані у вигляді нелінійної функції однієї або кількох змінних або у вигляді диференціальних рівнянь (звичайних або в приватних похідних). Найбільш поширеними серед нелінійних моделей при описі ДУ і ДЛА є:

- поліноміальні функції;
- позіномніе функції;
- тригонометричні функції;
- експоненціальні функції;
- звичайні диференціальні рівняння;
- диференціальні рівняння в приватних похідних ін.

Нелінійні моделі можуть бути записані у вигляді функціоналу, що залежить від керуючих змінних  $x$  і деяких функцій  $f(x)$  всіх або частини цих змінних:  $W = W(x, f(x))$ . При цьому функції  $f(x)$  можуть являти собою функціонали, залежні від

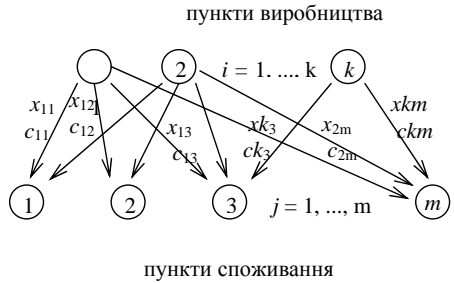


Рисунок 3.4

проміжних функцій  $f^*(x)$  і т.д. На клас функцій  $f(x)$ ,  $f^*(x)$  не накладалися ніяких обмежень, проте передбачається можливість однозначного переходу від вектора керуючих параметрів  $x$  до загальної характеристики моделі  $W$ .

Область визначення моделі може бути обмежена за допомогою рівності або нерівностей:

$$\begin{aligned} x_i &= c_i, & i &= 1, \dots, m; \\ f(X) &= c_j, & j &= 1, \dots, l; \\ x_{i \min} &\leq x_i \leq x_{i \max}, & i &= 1, \dots, k; \\ ff(X) &\leq c_j, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Власне кажучи під визначення нелінійної моделі підпадає будь-який математичний опис ДУ і ДЛА, що не вкладається в рамки більш простих моделей.

### 3.3 Поліноміальні моделі

Поліноміальні моделі засновані на ідеї наближеного представлення моделі кінцевим числом членів ряду Тейлора:

$$W(x) = W(x_0) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial W(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 W(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \dots$$

Найбільш простий з моделей цього класу є квадратична модель:

$$W(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j \geq i}}^k a_{ij} x_i x_j$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^k b_{ij} x_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, q_1; \quad \sum_{i=1}^k c_{ij} x_i = c_j, \quad j = 1, \dots, q_2; \quad \sum_{i=1}^k d_{ij} x_i \leq d_j, \quad j = 1, \dots, q_3.$$

Квадратичні моделі широко використовуються для подання експериментальних даних при ідентифікації ДЛА і їх елементів.

Квадратичні моделі використовуються для апроксимації окремих ділянок поверхні відгуку, коли лінійне наближення виявляється недостатнім, наприклад, в околиці екстремуму, і лежить в основі нелінійних методів оптимізації. Якщо квадратична модель також виявляється недостатньо точною, то використовуються поліноміальні моделі більш високих порядків.

Дослідження поліноміальних моделей частково можна здійснити аналітичними методами. Наприклад, аналітично можна визначити ступінь впливу окремих змінних на характеристики моделі.

### 3.4 Позіномні моделі

Позіномні моделі засновані на представленні моделі у вигляді суми добутків статечних функцій:

$$W(x) = \sum_{j=1}^m c_j x_1^{\alpha_{1j}} x_2^{\alpha_{2j}} \dots x_k^{\alpha_{kj}} = \sum_{j=1}^m c_j \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_{ij}}, \quad (3.5)$$

де  $x_i$  — керуючі змінні,  $\alpha_{ij}$  — довільні позитивні числа,  $c_j \geq 0$  — забезпечує опуклість моделі.

Величини  $\alpha_{ij}$ ,  $c_j$  розраховуються на основі статистичних даних, що відображають досвід виробництва відповідних вузлів і систем.

Позіномні моделі можна використовувати для опису вартості складних систем.



До позіномним моделям зводиться задача вибору геометричних характеристик ряду технічних пристроїв, в тому числі елементів ДІА, наприклад, електромагнітів, силових ферм і т.д.

Дослідження позіномних моделей складніше, ніж моделей полиномиального типу, і здійснюється в основному чисельними методами. Однак, при  $m = 1$  і  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , ...,  $x_k > 0$  у формулі (3.5) існує спосіб приведення позінома до лінійного вигляду.

У цьому окремому випадку модель (3.5) буде виглядати в наступному вигляді:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_k) = c \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}.$$

Прологарифміруем обидві частини цієї рівності, отримаємо

$$\ln W = \ln c + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_k \ln x_k. \quad (3.6)$$

Введемо позначення логарифмів змінних  $W$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_k$  і константи з:

$$Y = \ln W; \quad C = \ln c; \quad X_i = \ln x_i; \quad i = 1, \dots, k.$$

Вираз (3.6) прийме лінійний вид

$$Y(X_1, X_2, \dots, X_k) = C + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k.$$

Для пошуку оптимальних рішень на основі позіномних моделей розроблений спеціальний апарат - так зване геометричне програмування.

### 3.4.1 Математична модель найкоротшого шляху

Як приклад застосування нелінійних статичних моделей розглянемо задачу опису двовимірного руху точки по обмеженій області (рис. 3.5). Знайдемо найкоротший шлях від точки  $A$  з координатами  $(x_A, y_A)$  до точки  $B$  з координатами  $(x_B, y_B)$  на площині, з якої виключена область  $D$ , певна нерівністю  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Найкоротшим відстанню між двома точками на площині є з'єднує їх відрізок прямої.

Нехай відстань між точками  $A$  і  $B$  дорівнює  $p$  і центр кола, що обмежує область  $D$ , лежить посередині між точками  $A$  і  $B$ . Тоді

$$x_A = -\frac{p}{2}; \quad y_A = 0; \quad x_B = \frac{p}{2}; \quad y_B = 0.$$

Розглянемо шлях  $ACB$ , де точка  $C$  має координати  $(0, y_C)$ , а вус — досить велике, щоб відрізки  $AC$  і  $CB$  не перетиналися з областю  $D$ . Тоді по теоремі Піфагора

$$ACB = 2 \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + y_C^2}.$$

Звідси видно, що при зменшенні вус шлях скорочується. Будемо зменшувати вус до тих пір, поки  $AC$  не торкнеться кола в точці  $E_1$  ( $C \rightarrow 3$  1). Цей шлях є найкращим серед шляхів, складених з двох відрізків прямих ліній.

позначимо через  $\alpha$  кут  $\angle E_1 O C_1$ , тоді  $E_1 C_1 + C_1 F_1 = 2R \operatorname{tg} \alpha$ ;

Довжина дуги  $E_1 F_1$  визначається за формулою  $\operatorname{arc} E_1 F_1 = 2R\alpha$ , але  $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$  для всіх  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

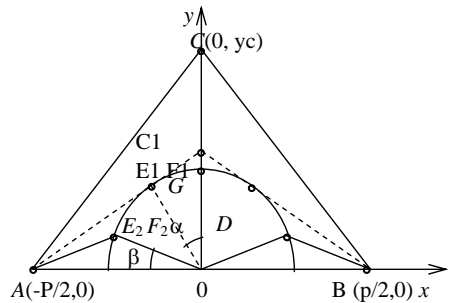


Рисунок 3.5

Отже, шлях, що складається з відрізка  $AE_1$ , дуги  $E_1F_1$  і відрізка  $F_1B$ , є більш коротким, ніж  $AC_1B$ .

На цій стадії вирішення завдання ми з'ясували, що найкоротший шлях складається з двох відрізків прямих ліній і дуги кола.

Для остаточного вирішення завдання розглянемо шлях  $AE_2$ , дуга  $E_2F_2$ ,  $F_2B$ , де  $\angle AOE_2 = \angle BOF_2 = \beta$ .

Довжину цього шляху позначимо через  $S$ . Отримаємо математичну модель шляху:

$$S = 2(AE_2 + \text{arc}E_2G) = 2 \left[ \sqrt{\left(\frac{p}{2} - R \cos \beta\right)^2 + R^2 \sin^2 \beta} + R \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \right]. \quad (3.7)$$

$$0 \leq \beta \leq \beta_{\text{огр}} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad (3.8)$$

де  $\alpha$  — кут між прямою  $E_1O$  і віссю  $OY$ .

Обмеження (3.8) вводиться тому, що при  $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$  пряма  $AE_1$  перетне область  $D$ , а цього не повинно бути.

Завдання полягає у визначенні кута  $\beta_0$ . При якому шлях  $S$  буде мінімальним. Необхідною умовою мінімуму функції  $S(\beta)$  є рівність нулю похідної:

$$\frac{dS}{d\beta} = 0. \quad (3.9)$$

Розглянемо окремий випадок:

$$P = 4; R = 1.$$

$$\text{тоді } \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{R}{p/2}\right) = \arcsin\left(\frac{R}{p/2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Підставивши значення  $p$  і  $R$  в математичну модель (3.7), отримаємо

$$S = 2 \left[ \sqrt{(2 - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta} + \frac{\pi}{2} - \beta \right].$$

Провівши деякі перетворення, отримаємо

$$S = 2 \left( \sqrt{5 - 4 \cos \beta} + \frac{\pi}{2} - \beta \right).$$

Візьмемо похідну по  $\beta$  від цього виразу і прирівняємо її до нуля.

$$\frac{4 \sin \beta}{2 \sqrt{5 - 4 \cos \beta}} - 1 = 0.$$

Отримали рівняння, вирішивши яке відносно  $\beta$ , Знайдемо значення кута  $\beta_0$ . При якому  $S$  мінімально. Опустивши проміжні перетворення, отримаємо  $\cos \beta = 1/2$ . Тобто  $\beta = \pi/3$ .

Щоб переконатися, що знайдене значення є точкою мінімуму, необхідно досліджувати другу похідну від (3.7). Якщо вона більше нуля при  $\beta = \beta_0$ , То  $S(\beta)$  Дійсно мінімальна в цій точці.

Друга похідна від  $S(\beta)$  має вигляд

$$\frac{d^2 S}{d\beta^2} = -4 \frac{2 \cos^2(\beta) - 5 \cos(\beta) + 2}{[5 - 4 \cos(\beta)]^{3/2}}.$$

Підставивши в неї знайдене значення  $\beta_0 = \pi/3$ , отримаємо

$$\left. \frac{d^2 S}{d\beta^2} \right|_{\beta_0 = \pi/3} = 0.$$

Рівність нулю другої похідної вимагає додаткового дослідження критичної точки. Необхідно знайти першу, що не обертається в нуль, похідну. Якщо вона непарного порядку, функція не має в досліджуваній точці ні максимуму, ні мінімуму. Якщо вона парного порядку і більше нуля, досліджувана точка є мінімумом. Перевіримо третю похідну від  $S(\beta)$  по  $\beta$ :

$$\left. \frac{d^3 S}{d\beta^3} \right|_{\beta=\frac{\pi}{3}} = - \frac{[4(4\cos^2(\beta) - 10\cos(\beta) + 13)]\sin(\beta)}{\sqrt{(5 - 4\cos(\beta))^5}} \bigg|_{\beta=\frac{\pi}{3}} = -2.$$

Звідси маємо, що при  $\beta = \pi/3$  функція  $S(\beta)$  не має ні максимуму, ні мінімуму. Дійсно, з графіка функції  $S(\beta)$  (рис. 3.6) видно, що на відрізку функція (2.16) монотонно убыває. У точці  $\beta_0 = \pi/3$ , яка відповідає  $\beta_{\text{огр}}$ , крива має точку перегину. Найменша в області визначення значення знаходиться на кордоні цієї області, отже, шлях  $AE_1GF_1B$  дійсно найкоротший і його довжина дорівнює  $S(\pi/3) = 4,511$ .

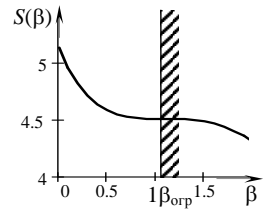


Рисунок 3.6

#### Контрольні питання до лекції 4

1. З якими значеннями величин оперують детерміновані моделі?
2. Як виглядає лінійна детермінована модель в загальному вигляді?
3. Що являє собою поверхню відгуку для лінійної моделі?
4. Наведіть модель вартості перевезень.
5. Де використовуються лінійні детерміновані моделі?
6. Які види нелінійних математичних моделей Ви знаєте?
7. Наведіть загальний вигляд квадратичного полінома.
8. Наведіть формулу позінома.
9. Як привести Позін до лінійного вигляду (за якої умови)?
10. До якого типу можна віднести модель найкоротшої відстані між двома точками?
11. Чи є знайдене значення кута  $\square$  точкою мінімуму шляху?
12. Чи є шлях  $S$  при знайденому значенні кута  $\square$  найкоротшим?

## Лекція 5

### 3.5. Математична модель у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

Математична модель у вигляді одного або декількох звичайних диференціальних рівнянь (ОДУ) широко використовуються при вивченні перехідних процесів в системах автоматичного регулювання (САР), при описі балістики літальних апаратів, а також при описі процесів руху (потоків, частки, механічні елементи).

У найпростішому випадку модель може мати вигляд лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)$$

або системи диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n);$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n).$$

Часто зустрічаються змішані задачі, а також нелінійні ОДУ.

Модель, задана у вигляді диференціальних рівнянь, повинна включати в себе необхідний набір початкових умов:

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1, \quad x''(0) = C_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

або  $x_1(0) = C_1, x_2(0) = C_2, \dots, x_n(0) = C_n$ .

Дослідження моделей, заданих у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, здійснюється аналітичними і чисельними методами. Найбільш повними є аналітичні рішення, що забезпечують всебічний аналіз отриманих результатів. Але такі рішення отримані лише для обмеженого числа диференціальних рівнянь. Чисельні методи рішення дозволяють знайти лише конкретні значення досліджуваної функції при заданій комбінації вихідних даних. Для аналізу моделі можна використовувати деяку сукупність рішень. Однак, очевидно, що результати аналізу в цьому випадку можуть залежати від вибору цієї сукупності.

В якості найпростішого прикладу математичної моделі механічної системи може бути розглянута модель руху вантажу масою  $m$ , закріпленого на вертикальній стінці за допомогою пружини жорсткістю  $C$  і здійснює коливальний рух уздовж осі  $x$  в середовищі з в'язкістю  $\nu$  (Рис. 3.7).

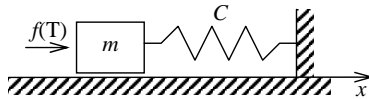


Рисунок 3.7

Оборуює сила, що викликає коливання, залежить від часу  $f(t)$ . Поряд з обуює силою  $f(t)$  на вантаж діє сила інерції  $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ , сила в'язкого тертя  $\nu \frac{dx(t)}{dt}$ , зусилля пружини  $\frac{1}{C} x(t)$ . Всі ці сили гальмують рух вантажу.

Згідно з принципом Даламбера сума всіх сил, що діють на вантаж повинна дорівнювати нулю:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \nu \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{C} x(t) - f(t) = 0. \quad (3.10)$$

Початкові умови характеризують початкове положення і початкову швидкість вантажу:

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = 0. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.10) спільно з початковими умовами (3.11) є математичною моделлю розглянутої механічної системи

### 3.6. Моделі, задані у вигляді рівнянь в приватних похідних

Ряд завдань, пов'язаних з використанням фізичних полів, призводить до моделей у вигляді диференціальних рівнянь в приватних похідних.

Особливістю таких завдань є те, що досліджувані параметри змінюються не тільки в часі, але і залежать від координат  $x, y, z$  розглянутого простору. Такі моделі називаються нестационарними. Моделі, в яких параметри не залежать від часу, називаються стаціонарними.

До таких моделей зводяться опису полів температур в елементах конструкції двигуна і полів швидкостей при перебігу рідини (газу). Рівняннями в приватних похідних описуються коливання елементів конструкції і поля напружень, що виникають при роботі цих елементів.

Лінійне диференціальне рівняння в приватних похідних має вигляд

$$a_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_2} + \dots + a_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} = f(x_1, x_2, \dots, x_k, t).$$

Математична модель, описана диференціальними рівняннями в приватних похідних, повинна включати в себе необхідні для вирішення завдання крайові умови:

1. Повинна бути задана область  $D$ , обмежена поверхнею (на площині — кривий)  $\Gamma$ , в якій визначається рішення.
2. Повинні бути задані умови на кордоні  $\Gamma$  цієї галузі.

У разі нестационарного поля ці граничні умови, так само як і сама область можуть змінюватися в часі.

Граничні умови можуть бути 1-го, 2-го і 3-го роду:

- а) Граничні умови 1-го роду передбачають завдання на кордоні величини шуканої функції:

$\Phi|_{\Gamma} = f_1(\Gamma)$  — для стаціонарного поля;

$\Phi(t)|_{\Gamma} = f_1(\Gamma, t)$  — для нестационарного поля.

- б) Граничні умови 2-го роду — передбачають завдання похідною шуканої функції:

$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma)$  — для стаціонарного поля;

$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma, t)$  — для нестационарного поля.

- в) Граничні умови 3-го роду — передбачають комбінації функції і її похідної:

$\left( a\Phi + b \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma)$  — для стаціонарного поля;

$\left( a(t)\Phi(t) + b(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma, t)$  — для нестационарного поля.

3. Для нестационарних полів повинні бути задані одне або два початкових умови, що характеризують стан поля в початковий момент часу:

$\Phi(x_i)|_{t=0} = f_4(x_i);$

$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_i) \right|_{t=0} = f_5(x_i), \quad (i = 1, 2, 3).$

Тут  $x_i$  — координати простору.

Сукупність рівнянь і крайових (і початкових) умов повністю визначає модель і дозволяє провести її дослідження.

Рішення часто задається у вигляді сімейств ізоліній  $\Phi = \text{Const}$  (рис. 3.8).

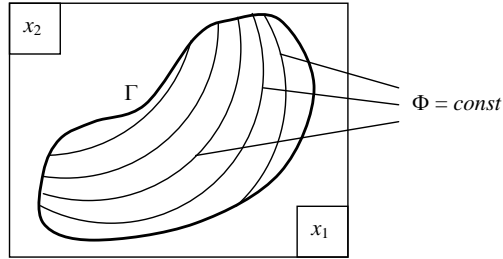


Рисунок 3.8

Як приклад розглянемо добре ізолюваний металевий пруток, що нагрівається з одного боку. З іншого боку поміщений вимірювач температури (Рис. 3.9). Величина підігріву  $x(t)$  в момент часу  $t$  є вхідним сигналом, а вимірювана на іншому кінці температура  $y(t)$  - вихідним сигналом.

позначимо через  $\xi$  відстань від вимірювача до точки прутка. Температура в цій точці  $z$  буде описуватися функцією виду

$$z = z(T, \xi).$$

Рівняння теплопровідності для одновимірного випадку для визначення функції  $z$  матиме вигляд:

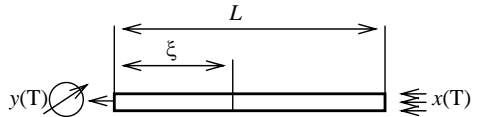


Рисунок 3.9

$$\frac{\partial z(t, \xi)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 z(t, \xi)}{\partial \xi^2},$$

де  $K$  — коефіцієнт теплопровідності.

Початковою умовою в даному випадку є початковий розподіл температури (при  $t = 0$ ) по прутку:  $z(0, \xi) = \varphi(\xi)$ .

Граничні умови визначаються трьома умовами:

а) Нагрівання прутка на правому кінці

$$\left. \frac{\partial z(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = Kx(t).$$

б) На лівому кінці підведення тепла відсутній

$$\left. \frac{\partial z(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0.$$

в) Показання на вимірнику температур ( $\xi = 0$ ) в момент часу  $t$  визначається наступним виразом

$$z(t, 0) = y(t).$$

Таким чином, для обчислення температури на відстані  $L$  від вимірювача за формулою для  $y(t)$  необхідно проінтегрувати диференціальне рівняння з урахуванням початкових і граничних умов, тобто отримати функцію  $z(t, \xi)$ . Потім слід проградувати вимірювач температури, тобто визначити відповідність між  $x(t)$  і  $y(t)$ , задаючи різні значення  $x(t)$  і обчислюючи  $z(t, L)$ .



## Контрольні питання до лекції 5

1. Де використовуються математичні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь?
2. Що повинна включати в себе математична модель у вигляді звичайних диференціальних рівнянь?
3. Якими методами здійснюється дослідження моделей, заданих у вигляді звичайних диференціальних рівнянь?
4. Запишіть математичну модель руху вантажу масою  $m$ , закріпленого на вертикальній стінці за допомогою пружини жорсткістю  $C$  і здійснює коливальний рух уздовж осі  $x$  в середовищі з в'язкістю  $\nu$ .
5. Який принцип використовується при побудові цієї моделі?
6. До якого типу належить ця модель?
7. Де використовуються математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь в приватних похідних?
8. Що є особливістю математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь в приватних похідних?
9. Що повинна включати в себе математична модель у вигляді диференціальних рівнянь в приватних похідних?
10. Якого типу бувають граничні умови?
11. Наведіть математичну модель розподілу температурного поля в металевому прутку, що нагрівається з одного боку.

## Лекція 6

### 3.7. Стохастичні моделі

Точні величини і залежності, що використовуються в детермінованих моделях, є лише деякі середні значення (математичні очікування) реальних випадкових величин (залежностей). Так, фізичні константи, що характеризують матеріали і робочі тіла (межа міцності матеріалу, теплопровідність  $\lambda$ , щільність  $\rho$  т.д.) змінюються в залежності від партії матеріалу і умов навколишнього середовища. Завжди є певний розкид розмірів деталей і витрат палива в системах подачі. Все це призводить до того, що і результуючі функції, що характеризують процес, також носять випадковий характер. Результати, отримані за допомогою детермінованої моделі, представляють собою математичні очікування цих характеристик. При цьому конкретні дані для конкретної системи можуть істотно відрізнятися від цих математичних очікувань. Наприклад, ресурс конкретного двигуна може істотно відрізнятися від середнього ресурсу двигунів даного типу. Для обліку таких відмінностей вводяться всілякі «запаси міцності», покликані гарантувати працездатність реальних об'єктів при несприятливому збігу обставин.

*Значно більш повні і об'єктивні результати можна отримати при переході від детермінованих до стохастическим моделям, тобто при переході від точно заданих величин до відповідних випадкових величин.*

При цьому константи ( $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $L$ , ...) замінюються випадковими величинами  $\xi_\sigma$ ,  $\xi_\lambda$ ,  $\xi_\rho$ ,  $\xi_L$ , ..., підлеглими певним законам розподілу.

Одноразове дослідження стохастичною моделі призведе до деякої випадкової величини функції відгуку  $\xi_w$ . Що представляє собою, взагалі кажучи, обмежену цінність. Для отримання значущих результатів необхідно провести багаторазове дослідження моделі і отримати розподіл результуючої характеристики в сюжеті, який

дослідника діапазоні. Поверхня відгуку в цьому випадку представляє собою якийсь розмитий шар змінної щільності.

|| Такий метод дослідження стохастичною моделі отримав назву методу статистичних випробувань або методу Монте-Карло.

Трудомісткість дослідження стохастичних моделей істотно вище, ніж моделей детермінованих:

1. Значно зростає обсяг вихідної інформації: заміна констант випадковими величинами, введення законів розподілу цих величин ускладнюють модель.
2. Для отримання розподілу результуючої функції необхідно багаторазове дослідження моделі.
3. Іншого боку, отримане при статистичному моделюванні розподіл характеристик системи дає в руки дослідника надзвичайно цінну інформацію: Такий розподіл дозволяє оцінити не тільки середнє значення досліджуваної величини, але і розкид цих значень, ймовірності появи тих чи інших значень при конкретному випробуванні (наприклад, ймовірність виходу з ладу ДЛА через той чи інший проміжок часу) і їх залежність від різних факторів.

Дуже часто використовують нормальний або гауссовський закон розподілу, для якого щільність ймовірності  $f(x)$  і функція розподілу  $P(X)$  задаються наступними співвідношеннями:

Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал  $(x, x + dx)$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал  $(-\infty, X)$ :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

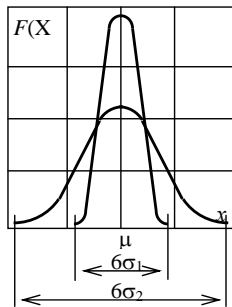


Рисунок 3.10

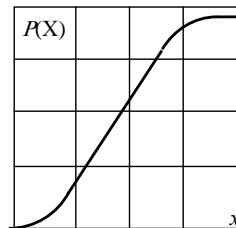


Рисунок 3.11

Для випадкової величини  $\xi$ , Розподіленої за нормальним законом,  $\mu = M(\xi)$ ,  $\sigma = \sigma(\xi)$  (рис. 3.10, 3.11). Випадкова величина розподілена в інтервалі  $\mu \pm 3\sigma$ . За нормальним законом розподілені зазвичай характеристики матеріалів, розміри деталей, ресурси елементів ДЛА.

Поряд з нормальним використовуються і інші закони розподілу випадкових величин. Наприклад, рівномірний розподіл — задає рівноймовірні на відрізьку  $[a, b]$  випадкові величини (рис. 3.12, 3.13). Щільність ймовірності і функція розподілу при рівномірному розподілі визначаються за формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & b < x < \infty. \end{cases} \quad P(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & b < x < \infty. \end{cases}$$

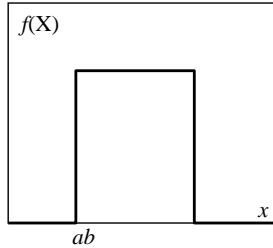


Рисунок 3.12

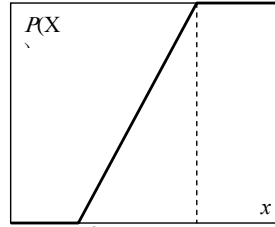


Рисунок 3.13

Вибір закону розподілу для конкретної випадкової величини, що входить в стохастическую модель, може бути обґрунтований експериментально або теоретично.

Конкретні параметри розподілу ( $\mu$ ,  $\sigma$ , ...) завжди визначаються на основі експериментальних даних. Оцінка параметрів нормального розподілу на основі вибірки  $\{x_i\}$  з  $n$  випадкових значень величини  $x$  дається співвідношеннями:

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n-1}}.$$

При використанні методу статистичних випробувань характеристики досліджуваної системи оцінюються на основі деякої обмеженої вибірки реалізацій. Тому важливо визначити достовірність цієї оцінки.

Ймовірність  $p$  перебування системи в деякому стані (наприклад, ймовірність того, що час роботи елемента ДЛА до першої відмови складе не менше  $t$  годин), визначається частотою цієї події при моделюванні:

$$p \approx \frac{n_+}{n},$$

де  $n_+$  — число реалізацій, при яких спостерігалось досліджуване стан системи (час роботи ДЛА до першої відмови перевищило  $t$ );  $n$  - загальне число реалізацій.

Ця оцінка є наближеною, тому що визначається на основі обмеженої вибірки. ставлення  $\frac{n_+}{n}$  називається вибірковою статистикою.

Помилка моделювання визначається відхиленням вибіркової статистики від ймовірності

$$\delta = \left| \frac{n_+}{n} - p \right|.$$

Можна показати, що ця помилка задовольняє нерівності

$$\delta \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{an}}, \quad (3.12)$$

Тут  $p$  - ймовірність розглянутого стану;  $\alpha$  - ймовірність невиконання оцінки (3.12) (рівень ризику). Довірча ймовірність виконання цієї оцінки дорівнює  $1-\alpha$ .

З (3.12) випливає, що похибка стохастичного моделювання обернено пропорційна  $\sqrt{n}$ . Тобто збільшення точності при стохастичному моделюванні вимагає

значного збільшення числа реалізацій. Для зменшення похибки в 10 разів необхідно збільшити число реалізацій (а значить і час рахунку) в 100 раз. Тому метод статистичних випробувань не може дати рішення з дуже високим ступенем точності. Вважається, що допустима помилка може становити 1-5% максимальної величини, отриманої при моделюванні.

Величина помилки залежить також від імовірності  $p$  оцінюваного стану і допустимого рівня ризику  $\alpha$ . Зазвичай  $\alpha$  задають на одному з фіксованих рівнів ( $\alpha = 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1 \dots$ ).

## Контрольні питання до лекції 6

1. Що являють собою величини, що входять в стохастическую модель?
2. Що являє собою поверхню відгуку моделей, досліджуваних методом статистичних випробувань?
3. У чому полягає метод Монте-Карло?
4. Які труднощі виникають при дослідженні стохастичних моделей?
5. Яку інформацію дає в руки дослідника отримане при статистичному дослідженні розподіл характеристик системи?
6. Які закони розподілу випадкової величини Ви знаєте?
7. Як виглядає щільність розподілу для нормального закону?
8. Як виглядає щільність розподілу для закону рівної ймовірності?
9. Як визначаються оцінки математичного очікування і дисперсії випадкової величини?
10. Що таке вибірка статистика?
11. Чому вона називається «вибірковою»?
12. Від чого залежить похибка стохастичного моделювання?

## лекція 7

### ТЕМА 4. Емпіричні математичні моделі

#### 4.1 Ідентифікація емпіричних математичних моделей

Перехід до емпіричним моделям передбачає явний відмова від аналітичних методів дослідження. Тому емпіричні моделі більш різноманітні і включають в себе різні за формою математичні залежності.

При розробці емпіричної математичної моделі передбачається використання експериментальних даних, отриманих при випробуваннях об'єктів. Результати таких випробувань завжди є наборами величин, що характеризують роботу об'єкта або системи при різних поєднаннях керуючих параметрів.

Найбільш ефективним засобом представлення результатів експериментів в системах математичного моделювання є емпіричні моделі.

При побудові емпіричної моделі зазвичай передбачається, що фізична теорія роботи об'єкта відсутня або з тих чи інших причин не може бути використана.

Об'єкт ідентифікації є так званий «чорний ящик» з деяким числом регульованих (або, принаймні, вимірюваних) входів  $x$  і одним або декількома спостерігаються (вимірюваними) виходами (рис. 4.1).

Тут  $x_i$  — керуючі змінні;  $\omega_i$  — невизначеності (шуми);  $q_i$  — обмеження;  $W$  — характеристична функція.

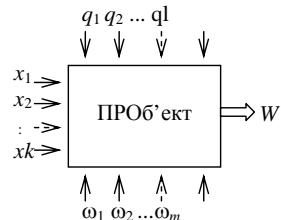


Рисунок 4.1

Завданням ідентифікації є побудова моделі об'єкта за результатами спостережень його реакції на обурення зовнішнього середовища.

При цьому необхідно враховувати помилки, які виникають при вимірюванні характеристик об'єкта.

Потрібно побудувати залежність (модель)

$$W = f(X),$$

яка описує характеристики досліджуваної системи.

Це рівняння називається рівнянням регресії і описує поверхню (гіперповерхню) відгуку, що характеризує емпіричну модель.

Зазвичай передбачається, що наявні експериментальні дані дають достатньо інформації для відтворення математичного опису об'єкта.

На рис. 4.2 показано рішення задачі ідентифікації для деякого набору даних, отримане за допомогою лінійної регресійної залежності:  $W = a + bx$ .

Ідентифікацію моделі починають з вибору форми моделі, тобто виду функції  $f(x)$ . При цьому на практиці може зустрітись два випадки:

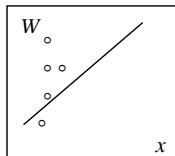


Рисунок 4.2

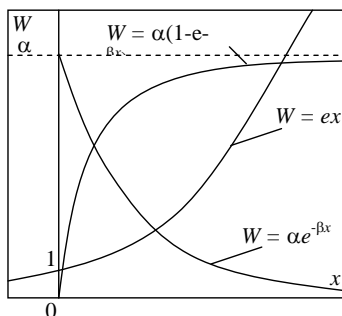


Рисунок 4.3

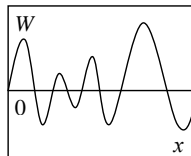


Рисунок 4.4

1) Форма математичної моделі відома заздалегідь, а завдання ідентифікації зводиться до визначення коефіцієнтів цієї моделі. Так, опис ряду затухаючих або розвиваються процесів дається залежностями експоненціального типу (рис. 4.3). Завдання дослідження є визначення коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ .

2) Форма математичної моделі заздалегідь невідома. В цьому випадку для ідентифікації моделі використовуються відрізки нескінченних рядів, а завдання полягає в визначення числа членів ряду і коефіцієнтів при цих членах. Модель може бути представлена у вигляді

$$W = \sum_{i=1}^k \beta_{0i} f_0(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} f_1(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^k \beta_{li} f_l(x_i),$$

де  $f_q(x_i)$  — деякі задані функції;  $\beta_{qi}$  — коефіцієнти регресії;  $q = 0, 1, \dots, l$ .

В одновимірному випадку ( $k = 1$ ) рівняння набуває вигляду

$$W = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \dots + \beta_l f_l(x).$$

Конкретний вид моделі залежить від вибору функцій  $f_q(x)$ , за якими проводиться розкладання  $W$ . Наприклад, при описі коливальних процесів зручно використовувати ряд Фур'є  $W = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$  (Рис. 3.4).

Часто в якості функцій  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_l(x)$  виступають статечні функції  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_L$ . Якщо обмежитися першими членами розкладання, то рівняння зведуться до лінійним, квадратичним і іншим поліноміальних моделей. Однак поки

залишається не ясним, скільки членів ряду забезпечує найкраще опис досліджуваного процесу.

Зазвичай беруть кількість експериментальних точок значно більше, ніж кількість коефіцієнтів регресії. У цьому випадку не можна побудувати поверхню відгуку, що проходить через всі експериментальні точки. Та цього й не потрібно. При цьому, однак, можна побудувати наближену модель, що забезпечує в деякому сенсі найкраще збіг з експериментальними даними.

Наприклад, пряма  $a$  побудована по 10-ти експериментальних точок методом найменших квадратів (рис. 4.5); крива  $b$  — квадратична модель;  $c$  — поліноміальна модель 3-го порядку досить добре відповідає початковому експериментальному матеріалу, хоча проходить не через всі експериментальні точки.

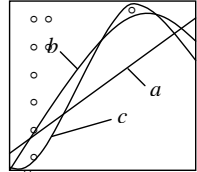


Рисунок 4.5

*Таким чином, для будь-якої експериментальної вибірки можуть бути запропоновані різні моделі ідентифікації. Конкретна форма моделі залежить від вибору функцій  $f_q(x)$  і кількості членів ряду.*

Сама постановка задачі ідентифікації включає в себе елемент невизначеності, можливість множинності рішень. Важливо вибрати краще або, принаймні, досить гарне з цих рішень.

Для оцінки точності моделі природно використовувати величини відхилень, отриманих в експерименті величин  $W_j$  і їх оцінок  $W_{mj}$ , передбачених моделлю

$$\varepsilon_j = W_j - W_{mj}. \quad (4.1)$$

Виключне поширення набув метод найменших квадратів відхилень реальних значень оцінюваної величини від значень, передбачених моделлю.

Спеціальні методи планування експерименту дозволяють істотно підвищити обсяг одержуваної інформації, покращують характеристики емпіричних моделей, а також спрощують процедуру обробки експериментальних даних. Однак на практиці дуже часто доводиться мати справу з неорганізованим (пасивним) експериментом. Пов'язане це з трьома причинами:

- 1) Дослідник може тільки спостерігати входи системи, але не може їх регулювати, що повністю виключає можливість планування експерименту (типова ситуація: астроном — галактика).
- 2) невідомі діапазони можливої зміни змінних (входів), що ускладнює планування експерименту і виключає можливість використання ряду ефективних методів планування.
- 3) Доводиться будувати моделі ідентифікації на основі вже отриманих раніше безладних експериментальних даних.

## 4.2. Використання методу найменших квадратів

Як простий приклад побудови моделі методом найменших квадратів розглянемо задачу відновлення математичного опису деякого процесу за результатами експерименту.

Передбачається, що процес описується одновимірним рівнянням 2-го порядку

$$W = a_0 + A_1x + a_2x^2, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Вважаємо, що величина  $x$  вимірюється точно, а  $W$  — з помилкою  $\varepsilon$ , що має нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією  $M(\varepsilon) = 0, \sigma^2(\varepsilon) = 1$ .

Вибірка десяти випадкових пар  $(x, \tilde{W})$  Представлена в табл. 3.1 в графах 2 і 3.



Таблиця 4.1

№	$x$	$\tilde{W}$	$Wm$	$\varepsilon$
1	2	3	4	5
1	4,8608	9,28	8,848	0,432
2	4,2396	9,40	8,821	0,579
3	2,7792	7,88	7,460	0,420
4	0,5988	1,86	2,039	-0,179
5	3,2136	7,77	8,056	-0,286
6	4,5156	8,73	8,874	-0,144
7	5,9340	8,33	8,118	0,212
8	1,5852	5,16	4,994	0,166
9	4,4880	7,28	8,872	<u>-1,592</u>
10	4,0932	9,22	8,767	0,453

Метод найменших квадратів полягає в тому, що невідомі (шукані) коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2$  повинні мінімізувати функцію, яка була сумою квадратів нев'язок  $\varepsilon_j$ :

$$G = \sum_{j=1}^{10} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{10} (Wm_j - \tilde{W}_j)^2.$$

Мінімум деякої функції, як відомо, знаходиться в точці  $(a_0^*, a_1^*, a_2^*)$ , Де всі приватні похідні цієї функції по змінним  $a_0, a_1, a_2$  дорівнюють нулю.

Для визначення приватних похідних, розпишемо функцію  $G$  через її передбачуваний вид:

$$G = \sum_{j=1}^{10} (a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j)^2.$$

Візьмемо від функції  $G$  похідні по  $a_0, a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial a_0} &= \sum_{j=1}^{10} [2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot 1]; \\ \frac{\partial G}{\partial a_1} &= \sum_{j=1}^{10} [2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot x_j]; \\ \frac{\partial G}{\partial a_2} &= \sum_{j=1}^{10} [2(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 - \tilde{W}_j) \cdot x_j^2]. \end{aligned}$$

Прирівнявши ці вирази до нуля і зробивши деякі перетворення, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку з трьома невідомими, коефіцієнти якої обчислюються за відомими даними з табл. 4.1:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 10 + a_1 \sum_{j=1}^{10} x_j + a_2 \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = \sum_{j=1}^{10} \tilde{W}_j; \\ a_0 \cdot \sum_{j=1}^{10} x_j + a_1 \sum_{j=1}^{10} x_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^{10} x_j^3 = \sum_{j=1}^{10} \tilde{W}_j x_j; \\ a_0 \cdot \sum_{j=1}^{10} x_j^2 + a_1 \sum_{j=1}^{10} x_j^3 + a_2 \sum_{j=1}^{10} x_j^4 = \sum_{j=1}^{10} \tilde{W}_j x_j^2. \end{cases}$$

Вирішуючи отриману систему, отримаємо  $a_0 = -0,161$ ;  $a_1 = 3,929$ ;  $a_2 = -0,427$ .

Таким чином, математична модель матиме вигляд

$$W_m = -0,161 + 3,929x - 0,427x_2. \quad (4.2)$$

Перевіримо адекватність моделі методом Фішера. Для цього заповнимо четвертий і п'ятий стовпці таблиці 4.1, підставляючи в математичну модель (4.2) і потім в формулу (4.1) значення  $x_j$  з першого стовпчика.

Визначимо число ступенів свободи системи по формулі

$$f_s = n - m - 1,$$

де  $n = 10$  — кількість експериментальних точок;  $m = 3$  — кількість невідомих коефіцієнтів. Тобто  $f_s = 6$ .

Вибіркова дисперсія обчислюється за формулою

$$s^2(\epsilon) = \frac{1}{f_s} \sum_{j=1}^{10} (\tilde{W}_j - W_{mj})^2 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{10} (\tilde{W}_j - W_{mj})^2 = 0,607.$$

Критерій Фішера обчислюється за формулою

$$F = \frac{s^2(\epsilon)}{\sigma^2(W)} = 0,607.$$

За статистичними таблицями при 5% -му рівні ризику ( $\alpha = 0,05$ ) знаходимо граничне значення критерію Фішера

$$F_{f,\alpha} = F_{6;0,05} = 2,01.$$

Так як отримане значення  $F$  менше критичного (порогового), гіпотеза про адекватність моделі реальному процесу приймається.

### 4.3. Вибір оптимальної емпіричної моделі

Принцип найменших квадратів дозволяє знайти найкращу модель ідентифікації для досліджуваної експериментальної вибірки з заданим рівнянням регресії виду

$$W = \sum_{i=1}^k \beta_{0i} f_0(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} f_1(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^k \beta_{li} f_l(x_i).$$

Якщо є досить вагомі підстави для вибору форми цього рівняння, ніяких проблем не виникає. Однак, в більшості випадків конкретна форма моделі заздалегідь невідома і може, взагалі кажучи, бути різною.

На перший погляд може здатися, що більш складна модель (збільшення ступеня полінома) завжди забезпечує отримання більшій точності. Насправді це не так. При переході до поліномами вищого рівня можна, звичайно, отримати краще згоду регресійної кривої з експериментальними даними. Для  $m = n$  це домовленість повинна абсолютним, але при цьому вийде гірше згоду з істинним характером процесу  $W(x)$ . Справа в тому, що експериментальні дані представляють собою випадкові величини і містять лише обмежену інформацію про характер  $W(x)$ . Збільшення ступеня полінома доцільно лише до тих пір, поки з експериментальної вибірки витягується надійна інформація. Таким чином, виникає проблема вибору форми моделі.

Підхід до вирішення цієї проблеми заснований на статистичному дослідженні рівнянь регресії.

1) Метод усіх можливих регресій заснований на послідовному вивченні всіх можливих моделей ( $m < n$ ), з яких відбирається найкраща модель.

Метод видається мало придатним для аналізу складних систем, так як відрізняється високою трудомісткістю.

2) Метод виключення припускає дослідження найбільш повної (в межах розумного) моделі і послідовну перевірку на значимість всіх її членів. При цьому для кожного з членів моделі обчислюється величина критерію Фішера  $F$ . На основі отриманого безлічі  $\{F_i\}$  вибирається член рівняння регресії, відповідний мінімальним значенням критерію  $F_i$ . Якщо це мінімальне значення менше критичного при

обраному рівні ризику ( $F_i < F_{\alpha}$ ), То відповідний член виключається з регресійного рівняння як несуттєвий, після чого всі коефіцієнти регресії перераховуються заново і знову здійснюється перевірка їх значимості.

Якщо  $F_i > F_{\alpha}$ , То всі члени моделі істотні і рівняння регресії залишається в первісному вигляді. Однак, якщо це сталося вже на першому кроці дослідження, доцільно розглянути доцільність ускладнення первісної моделі.

Трудомісткість цього методу менше, ніж методу усіх можливих регресій.

3) Метод включень по суті протилежний методу виключень і передбачає послідовне включення в модель нових членів з перевіркою їх статистичної значущості.

Трудомісткість цього методу істотно менше трудомісткості розглянутих вище методів.

Існують і деякі інші методи підбору оптимального рівняння регресії.

Загальним недоліком усіх розглянутих раніше методів є використання для оцінки моделі того ж експериментального матеріалу, на основі якого ця модель побудована.

4) Інший підхід заснований на використанні регуляризації. При цьому підході всі експериментальні дані розбиваються на дві частини: навчальну ( $n_1$ ) і перевірочну ( $n_2$ ). Перша з них використовується для визначення коефіцієнтів регресії моделі, друга – для оцінки моделі в цілому.

Оптимальні з цього підходу моделі мало чутливі до невеликих змін вихідних даних.

Число точок навчальної послідовності має бути, принаймні, на одиницю більше числа коефіцієнтів регресії ( $n_1 > m + 1$ ). Для підвищення достовірності результатів цей запас повинен бути істотно збільшений ( $n_1 \geq (2 \dots 3) m$ ). Перевірочна послідовність повинна включати в себе хоча б одну точку.

У ряді випадків в якості критерію регуляризації зручно використовувати критерій незсуеності, що забезпечує найменше зміна моделі при зміні складу навчальної послідовності. При цьому весь експериментальний масив розбивається на дві однакові за величиною послідовності ( $n_1 = n_2$ ), кожна з яких по черзі використовується в якості навчальної. В результаті їх використання визначаються дві незалежні, однакові за формою моделі  $W_m^*(n_1)$  і  $W_m^{**}(n_2)$ . Оптимальна модель шукається по всіх точках вибірки:

*Критерій регуляризації завжди має чітко виражений мінімум, що забезпечує об'єктивне виділення моделі оптимальної складності.*

## Контрольні питання до лекції 7

1. Що є вихідним матеріалом при побудові емпіричної моделі?
2. Як використовується фізична теорія роботи об'єкта при побудові емпіричної моделі?
3. Що при цьому є об'єктом ідентифікації?
4. Сформулюйте задачу ідентифікації.
5. Що таке рівняння регресії?
6. З чого починається процес ідентифікації?
7. Від чого залежить конкретна форма моделі?
8. Перерахуйте причини проведення непланованої експерименту.
9. У чому полягає метод найменших квадратів?

## Лекція 8

### ТЕМА 5. Математичні моделі теорії прийняття рішень

#### 5.1. Загальні відомості про теорію прийняття рішень

Прийняття рішень є основою будь-якої діяльності людини.

Найпростіша схема прийняття рішень включає в себе деяку мету і сукупність способів її досягнення (Рис. 5.1).

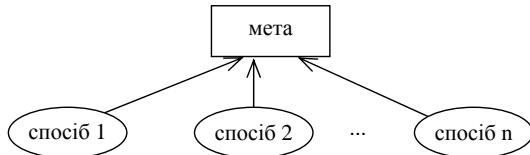


Рисунок 5.1

*Під метою будемо розуміти конкретний кінцевий результат, який необхідно отримати шляхом вибору і реалізації тих чи інших способів діяльності.*

*При цьому в будь-якому процесі прийняття рішень обов'язково присутній суб'єкт прийняття рішень, який в загальному випадку є групою осіб, відповідальних за цілепокладання, формування варіантів способів дій і, головне, за вибір конкретного рішення.*

При формуванні оптимальних рішень обов'язковою є наявність критеріїв оптимальності рішень або по-іншому цільових функцій.

*Критерієм оптимальності називається математичне вираз, що дозволяє кількісно оцінити ступінь досягнення поставленої мети при виборі того чи іншого рішення.*

Завдання ПР називається однокритерійним, якщо вибираєте рішення служити досягненню однієї мети. Наприклад, вибір управлінського рішення по виробничій програмі підприємства, що дозволяє отримати максимум прибутку (мета) від реалізації продукції.

У багатьох ситуаціях ПР об'єктивно присутні кілька цілей.

Завдання ПР, які відповідають кільком цілям, називаються багатокритеріальною задачею. Наприклад, при виборі проектних рішень по новому пасажирському літаку потрібно забезпечити максимальне число пасажирів (мета 1) при мінімальній витраті палива (мета 2).

Відзначимо, що якщо в однокритеріальних завданнях можливо отримання єдиного оптимального рішення (рис. 5.2 а), то в багатокритеріальних ЗПР така можливість відсутня (рис. 5.2 б).

В багатокритеріальних задачах можливе отримання сукупності компромісних варіантів (ВКВ) рішень на інтервалі  $[x_{1\text{ опт}}, x_{2\text{ опт}}]$ .

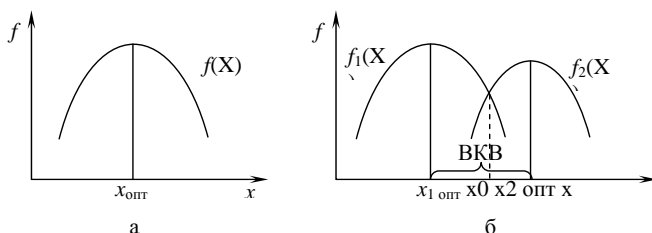


Рисунок 5.2

## 5.2. Загальна математична модель формування оптимальних рішень

У математичних моделях прийняття рішень в якості нового знання виступає оптимальне рішення, яке в найкращому сенсі відповідає досягненню поставленої мети (цілей).

Введемо в розгляд  $n$ -мірний вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , який визначає кількісні характеристики формованого рішення.

Позначимо через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вектора відповідних розмірностей, що описують кількісні характеристики неконтрольованих чинників.

Для оцінки ефективності різних варіантів рішень будемо використовувати спеціальним чином сформовану функцію:

$$W = f(C, X),$$

яка називається критерієм оптимальності рішень або цільовою функцією завдання ПР.

Тоді вибір оптимального рішення  $X_{\text{опт}}$  будемо здійснювати, виходячи з вимоги  $W(x) \rightarrow \max_{x \in X}(\min)$ .

Безліч  $X$  має бути допустимим з точки зору обліку умов прийняття рішень (обмежень).

Нехай ЛПР має для досягнення мети вектором ресурсів  $b$ . Уявімо у вигляді вектор-функції  $\varphi(A, X)$  фактичні витрати ресурсів при використанні вектора рішень  $X$  і вектора деяких факторів  $a$ , тоді  $\varphi(A, X) \leq b$  є обмеження.

У багатьох задачах ПР враховується умова  $X \geq 0$ .

Таким чином, загальна математична модель формування оптимальних рішень може бути представлена в наступному вигляді:

$$W = f(c, X) \rightarrow \max; \quad (5.1)$$

$$\varphi(a, X) \leq b; \quad (5.2)$$

$$X \geq 0. \quad (5.3)$$

Постановка завдання в цьому випадку виглядає наступним чином:

*Знайти значення вектора  $X$ , що доставляє максимум (мінімум) критерію оптимальності рішень (5.1) і задовольняє при цьому умовами (5.2) і (5.3).*

Математична модель ПР (5.1) — (5.3) є однокритерійним моделлю.

Якщо ОПР повинен враховувати  $m$  цілей, то, формалізуючи їх у вигляді критеріїв оптимальності, отримаємо:

$$W_1 = f_1(c_1, X) \rightarrow \max;$$

$$W_2 = f_2(c_2, X) \rightarrow \min; \quad (5.4)$$

.....

$$W_m = f_m(c_m, X) \rightarrow \text{extr};$$

де  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — вектора неконтрольованих чинників.

Математична модель (5.4), (5.2), (5.3) є многокритеріальною моделлю.

В реальних задачах ПР обмеження виду (5.2) можуть включати в себе як нерівності виду « $\leq$ », « $\geq$ », « $=$ », Так і їх різні поєднання.

## 5.3. Побудова і рішення оптимізаційної задачі прийняття рішення (Завдання про бак)

Нехай потрібно вибрати геометричні розміри циліндричного бака об'ємом  $V$  з умови мінімальної витрати матеріалу на його виготовлення.

Для побудови математичної моделі введемо в розгляд вектор проектних рішень  $X = (r, h)$ , де  $2r$ ,  $h$  — діаметр і висота бака (рис. 5.3).

Якщо припустити, що бак виготовляється зварюванням з трьох деталей, то витрата матеріалу при довільному векторі рішень  $X$  дорівнюватиме площі поверхні бака:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min_{r,h}. \quad (5.5)$$

Згідно з умовами завдання вираз (5.5) є цільовою функцією (критерій оптимальності проектних рішень).

Умова того, що бак повинен мати обсяг заданого значення  $V$ , представимо у вигляді:

$$\pi r^2 h = V. \quad (5.6)$$

На компоненти вектора рішень  $X$  необхідно накласти додаткові умови:

$$R > 0, h > 0. \quad (5.7)$$

Вирази (5.5) – (5.7) описують нелінійну однокритеріальну модель формування оптимальних рішень, при  $n = 2, m = 1$ .

Нехай бак повинен мати мінімальну трудомісткість його виготовлення. Якщо вважати трудомісткість виготовлення кришки, дна і бічної стінки досить малими величинами, то витрати часу на виготовлення бака будуть пропорційні довжині зварюваних швів:

$$T = c(4\pi r + h) \rightarrow \min_{r,h}, \quad (5.8)$$

де  $c$  — витрати часу на зварювання одиниці довжини.

Вирази (5.5), (5.8), (5.6), (5.7) описують двокритеріальну нелінійну модель формування оптимальних рішень.

При побудові математичної моделі в цьому завданні прийняття рішень були використані відомі геометричні закономірності.

Аналітичне рішення задачі ПР можливо, якщо відповідна математична модель включає в себе обмеження типу рівностей, тобто має вигляд:

$$W = f(c, X) \rightarrow \text{extr};$$

$$\varphi(a, X) = b;$$

$$-\infty < X < \infty.$$

Такі завдання вирішуються зазвичай класичними методами умовної оптимізації, які передбачають побудову функції Лагранжа виду

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) =$$

$$f(c, x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [\varphi_j(a, x_1, \dots, x_n) - b_j], \quad (5.9)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  - невизначені множники Лагранжа.

Точки екстремуму цієї функції визначаються з рішення системи рівнянь виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Вирішуючи цю систему, отримаємо рішення виду

$$\begin{aligned} x_i^{\text{опт}} &= \psi_i(a, b, c), \quad i = 1, \dots, n; \\ \lambda_j &= \lambda_j(a, b, c), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Використовуємо цей метод для вирішення однокритеріальним завдання (5.8), (5.6) (без урахування (5.5), (5.7)).

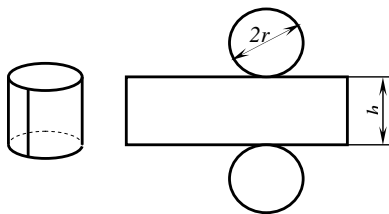


Рисунок 5.3

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(r, h, \lambda) = c(4\pi r + h) + \lambda(\pi r^2 h - V).$$

Система рівнянь (4.17) щодо змінних  $r, h, \lambda$ :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi c + 2\lambda\pi r h = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = c + \lambda\pi r^2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - V = 0.$$

Маємо систему алгебраїчних рівнянь, вирішуючи яку, отримаємо значення невідомих  $r, h$  ( $\lambda$  знаходити необов'язково):

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}; \quad h = \sqrt[3]{4\pi V}; \quad \lambda = -c \sqrt[3]{\frac{4\pi}{V^2}}.$$

Таким чином, оптимальні розміри бака, знайдені за допомогою аналітичного методу умовної оптимізації, які не залежать від витрат часу з на зварювання одиниці довжини, але залежать від необхідного обсягу бака  $V$ . Вимога (5.8) при цих значеннях  $r$  і  $h$  виконується, тобто трудомісткість буде мінімальною.

Недоліками цього методу є:

- 1) Не враховуються в явному вигляді умови невід'ємності (5.7).
- 2) Система рівнянь (5.10) дозволяє отримати рішення в формі (5.11) тільки для простих функцій (5.5), (5.6).

#### 5.4. Багатокритеріальні задачі прийняття рішень

У багатьох задачах прийняття рішень є кілька цілей, які хоче досягти ЛПР. Такі завдання зводяться до багатокритеріальним завданням виду:

$$W_1 = f_1(X) \rightarrow \underset{X}{extr};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_k = f_k(X) \rightarrow \underset{X}{extr};$$

$$\varphi(X) \leq 0; \quad X \geq 0,$$

де  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор рішень.

Найбільшого поширення на практиці рішення таких задач отримав підхід, пов'язаний з роботами італійського математика-економіста Вікторіо Парето. Він забезпечує ОПР можливість гнучкого прийняття рішень. При оптимізації за Парето будується безліч «неулучшаємих» рішень, зміна кожного з яких погіршує значення цільових функцій  $f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)$ .

Розглянемо найбільш поширену на практиці двохкритеріальний завдання оптимізації виду:

$$W_1 = f_1(x_1, x_2) \rightarrow \max; \tag{5.12}$$

$$W_2 = f_2(x_1, x_2) \rightarrow \max;$$

$$\varphi(x_1, x_2) \leq 0; \tag{5.13}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Умови (5.13) визначають безліч допустимих рішень і утворюють на площині  $x_1 O x_2$  деяку область, кожній точці  $C$  якої відповідає точка  $C^*$  в просторі значень критеріїв  $W_1 O W_2$  (рис. 4.4). Її координати  $W_1^{C^*}; W_2^{C^*}$  обчислюються за формулами (5.12) при  $x_1 = x_1 C; x_2 = x_2 C$ :

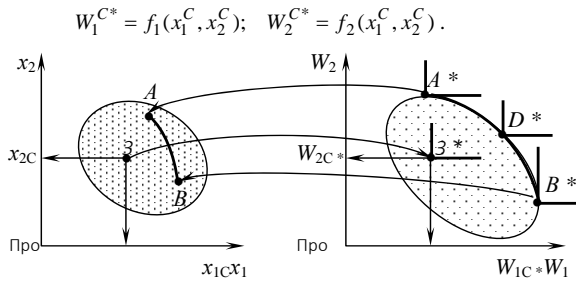


Рисунок 5.4

Розглянемо в безлічі значень критеріїв чотири точки  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $D^*$  і  $C^*$  (рис. 5.4). Точка  $A^*$  є оптимальною для критерію  $W_2 = f(x_1, x_2)$ , так як в цій точці критерій  $W_2$  має максимальне значення. Аналогічно точка  $B^*$  є оптимальною для критерію  $W_1 = f(x_1, x_2)$ . Точка  $C^*$  є «свідомо поганий» точкою, вона не є оптимальною ні для одного критерію, так як в області значень критеріїв можна знайти «більш кращу» точку  $D^*$  таку, що  $W_1^{D^*} > W_1^{C^*}$ ;  $W_2^{D^*} > W_2^{C^*}$ . Для точок  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $D^*$  більш «кращих» точок в просторі значень критеріїв не існує. Такі точки складають безліч рішень, оптимальних за Парето в просторі значень критеріїв. У нашому випадку це точки кривої  $A^*D^*B^*$ . Для виділення «кращих» (неулучшаємих) точок використовується поняття конуса  $K_i$  з вершиною в точці  $(W_1^i, W_2^i)$  (рис. 5.5). Рівняння цього конуса мають вигляд:  $W_1 \geq W_1^i$ ;  $W_2 \geq W_2^i$ .

**Правило виділення «кращих» точок:**

*Якщо в конусі  $K_i$  лежить хоча б одна точка  $(W_1^j, W_2^j)$ , То вона є більш кращою, ніж точка  $(W_1^i, W_2^i)$  (рис. 4.5).*

*Тоді всі крапки безлічі значень критеріїв, для яких відповідні конуси є порожніми, є парето-оптимальними рішеннями в просторі значень критеріїв.*

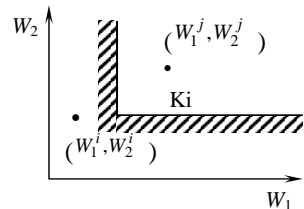


Рисунок 5.5

Для нашого прикладу конуси, побудовані в усіх точках кривої  $A^*D^*B^*$  (рис. 5.4), є порожніми. Будуючи зворотне відображення цих точок в простір рішень  $X$ , можна отримати безліч шуканих рішень (крива  $AB$  на рис. 5.4), оптимальних за Парето. Таке безліч називається безліччю компромісів, безліччю ефективних точок або безліччю Парето. Побудувавши безліч компромісів, ЛПР вибирає в ньому з неформальних міркувань деяку точку, яка є найкращим компромісом, на думку ОПР.

## Контрольні питання до лекції 8

1. Що включає в себе найпростіша схема прийняття рішень?
2. Що таке мета?
3. Що таке критерій оптимальності?
4. Що таке однокритеріальних ЗПР?
5. Що таке багатокритеріальну ЗПР?



6. Чи можливе одержання єдиного оптимального рішення в багатокритеріальних задачах?
7. Напишіть загальний вигляд математичної моделі формування оптимальних рішень.
8. Сформулюйте задачу прийняття рішень.
9. Запишіть критерій мінімальної витрати матеріалу для завдання про баку.
10. Запишіть критерій мінімальної трудомісткості для завдання про баку.
11. Запишіть загальний вигляд функції Лагранжа.
12. Перерахуйте недоліки аналітичного методу умовної оптимізації.
13. Які рішення називаються паретооптимальними?
14. Сформулюйте правило виділення кращих точок.
15. Що таке безліч компромісних рішень?

## Лекція 9

### ТЕМА 6. Системи комп'ютерної математики

Еру створення комп'ютерної символічної математики прийнято відраховувати з початку 60-х років. Саме тоді в обчислювальній техніці виникла нова гілка комп'ютерної математики, не зовсім точно, але зате помітно названа комп'ютерної алгеброю. Йшлося про можливість створення комп'ютерних систем, здатних здійснювати типові алгебраїчні перетворення: підстановки в виразах, спрощення виразів, операції із статичними многочленами (поліномами), рішення лінійних і нелінійних рівнянь і їх систем, обчислення їх коренів і т. Д. При цьому передбачалася можливість отримання аналітичних (символьних) результатів всюди, де це тільки можливо.

На жаль, книги з цього напрямку були здатні лише відлякати звичайного читача і користувача комп'ютера від вивчення можливостей комп'ютерної алгебри в силу перенасиченості їх вузькоспеціальних теоретичним матеріалом і вельми специфічної мови опису. Матеріал таких книг, можливо, цікавий математикам, що займаються розробкою систем комп'ютерної алгебри, але аж ніяк не основний масі їх користувачів.

Більшість же користувачів зацікавлене в тому, щоб правильно виконати конкретні аналітичні перетворення, обчислити в символічному вигляді похідну або первісну заданої функції, розкласти її в ряд Тейлора або Фур'є, провести апроксимацію і т. Д., А зовсім не в детальному і складному математичному і логічному описі того, як це робиться комп'ютером (або, точніше, його програмістом). Тут та ж ситуація, що і з телевізором, радіоприймачем або факсом: більшість з нас користуються цими апаратами, зовсім не цікавячись тим, як саме вони виконують свої досить складні функції.

Зрозумівши цю істину, багато західних фірм приступили до створення комп'ютерних систем символічної математики, орієнтованих на широкі кола користувачів, які не є професіоналами в комп'ютерній алгебрі. З огляду на неймовірно велику складність автоматизації вирішення завдань в аналітичному вигляді (число математичних перетворень і співвідношень дуже велике, і деякі з них неоднозначні в тлумаченні), перші подібні системи вдалося створити лише для великих ЕОМ. Але потім з'явилися і системи, доступні для міні-ЕОМ.

Системи комп'ютерної математики - нові засоби, що автоматизують виконання як чисельних, так і аналітичних обчислень. Вони акумулюють і надають користувачеві можливості, накопичені за багатовіковий досвід розвитку математики,

мають прекрасну кольорову графіку. Дозволяють готувати електронні уроки і книги з живими прикладами і представляють великий інтерес для системи освіти.

Останнім часом ми стали свідками появи нового, актуального і корисного наукового напрямку — комп'ютерної математики. Її можна визначити як сукупність теоретичних, алгоритмічних, апаратних і програмних засобів, призначених для ефективного вирішення на комп'ютерах усіх видів математичних задач з високим ступенем візуалізації всіх етапів обчислень. Остання відіграє вирішальну роль у впровадженні систем комп'ютерної математики (СКМ) в освіту — як в вища, так і початкова.

Системи комп'ютерної математики вже використовуються для вирішення навчальних, наукових та інженерних задач, наочної візуалізації даних і результатів обчислень і як зручних і повних довідників по математичних обчислень. Вони стали потужним інструментом для підготовки електронних уроків, курсів лекцій та електронних книг з живими прикладами, які учень може міняти.

Попит на універсальні і спеціалізовані програмні пакети для вирішення різних прикладних задач викликав появу на ринку програмних продуктів систем комп'ютерної математики, які швидко стали популярними. На ринку сучасних математичних систем (рис. 6.1) в даний час присутня цілий ряд великих фірм: Macsyma, Inc., Waterloo Maple Software, Inc., Wolfram Research, Inc., MathWorks, Inc., MathSoft, Inc., SciFace GmbH і ін.



Рисунок 6.1 - Система комп'ютерної математики

До розробки кожної такої математичної системи залучаються сотні професіоналів з відомих університетів і великих наукових центрів, а також висококваліфіковані програмісти і експерти в області проектування складних програмних систем. В результаті ми маємо досить досконалі, гнучкі і одночасно універсальні продукти, що включають суттєві математичні поняття і володіють багатим набором методів для вирішення спільних математичних і науково-технічних завдань.

Помітне розвиток отримали мови програмування для символьних обчислень Reduce, система muMath для малих ЕОМ, а в подальшому - інтегровані системи символьної математики для персональних комп'ютерів: Derive, MathCAD,

Mathematica, Maple V і ін.

### 6.1. Конструювання об'єктів з використанням пакета Mathematica

*Mathematica* — система комп'ютерної алгебри, яка використовується в багатьох наукових, інженерних, математичних і комп'ютерних областях. Спочатку система була придумана Вольфрам, в даний час розробляється компанією *Wolfram Research*.

Крім того, *Mathematica* — це інтерпретується мова функціонального програмування. Можна сказати, що система *Mathematica* написана на мові *Mathematica*, хоча деякі функції, особливо пов'язані з лінійної алгебри, з метою оптимізації були написані на мові *C*.

*Mathematica* підтримує і процедурне програмування із застосуванням стандартних операторів управління виконанням програми (цикли і умовні переходи), і об'єктно-орієнтований підхід. *Mathematica* допускає відкладені обчислення. Також в системі *Mathematica* можна задавати правила роботи з тими чи іншими виразами.

За допомогою програми *Mathematica* можна здійснювати широкий спектр символічних перетворень, що включає поряд з іншими операціями математичного аналізу: диференціювання, інтегрування, розкладання в ряди, рішення диференціальних рівнянь і т.д. Одна із сильних сторін розглянутого програмного продукту — розвинена двовимірна і тривимірна графіка.

*Mathematica* — це інтерпретується мова функціонального програмування. Можна сказати, що система *Mathematica* написана на мові *Mathematica*, хоча деякі функції, особливо пов'язані з лінійної алгебри, з метою оптимізації були написані на мові *C*.

*Mathematica* підтримує і процедурне програмування із застосуванням стандартних операторів управління виконанням програми (цикли і умовні переходи), і об'єктно-орієнтований підхід. *Mathematica* допускає відкладені обчислення. Також в системі *Mathematica* можна задавати правила роботи з тими чи іншими виразами.

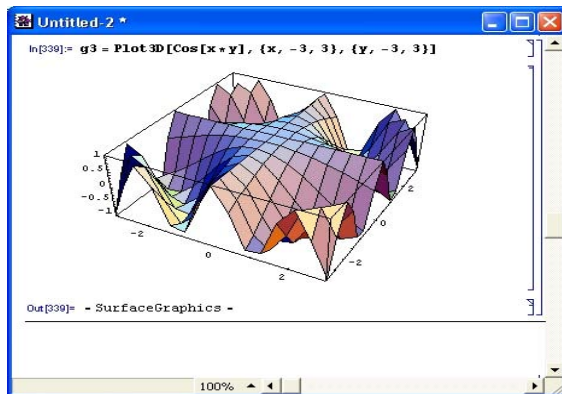


Рисунок 6.2 - Приклад побудови поверхні  $\cos(xy)$  функцією Plot3D з опціями за замовчуванням

### 6.2. Конструювання об'єктів з використанням пакета Maple

*Maple* — система комп'ютерної математики, розрахована на широке коло користувачів. До недавнього часу її називали системою комп'ютерної алгебри, це вказувало на особливу роль символічних обчислень і перетворень, які здатна здійснювати ця система. Але таку назву звучує сферу застосування системи.

Насправді вона вже здатна виконувати швидко і ефективно не тільки символьні, а й чисельні розрахунки, причому сполучить це із чудовими засобами графічної візуалізації і підготовки електронних документів.

Здавалося б, безглуздо називати таку потужну систему, як Maple математичною системою «для всіх». Однак у міру її поширення вона стає корисною для багатьох користувачів ПК. Використання Maple простягається від вирішення навчальних завдань в вузах до моделювання складних фізичних об'єктів, систем і пристроїв, і навіть створення художньої графіки (наприклад, фракталів).

Взагалі кажучи, системи Maple орієнтовані на вирішення складних завдань, хоча і рішення в них простих завдань цілком допустимо і доречно. Можливо, для вирішення таких завдань цілком підійде вельми проста, швидка і надійна система Derive або система Mathcad, в яку (починаючи з версії 3.0 під Windows) включений придбаний за ліцензією фірми Waterloo Maple спрощений символьний процесор Maple. Однак за кількістю доступних користувачеві математичних функцій ці скромні системи не йдуть ні в яке порівняння з патріархом символьної математики — системою Maple.

Система Maple може з успіхом застосовуватися для вирішення найсерйозніших математичних задач аеродинаміки, теорії поля, теплопровідності і дифузії, теоретичної механіки та ін. Рішення таких завдань нерідко є багаторічною працею елітних наукових колективів.

Для побудови графіків тривимірних поверхонь Maple має вбудовану в ядро функцію plot3d. Вона може використовуватися в наступних форматах:

$$\text{plot3d}(\text{expr1}, x = a..b, y = c..d, p). \quad (6.1)$$

$$\text{plot3d}(f, a..b, c..d, p). \quad (6.2)$$

$$\text{plot3d}([\text{exprf}, \text{exprg}, \text{exprh}], s = a..b, t = c..d, p) \quad (6.3)$$

$$\text{plot3d}([\text{fgh}], a..b, c..d, p). \quad (6.4)$$

У двох перших формах plot3d застосовується для побудови звичайного графіка однієї поверхні, в інших формах — для побудови графіка з параметричної формою завдання поверхні. У наведених формах записи  $f$ ,  $g$  і  $h$  — функції;  $\text{expr1}$  — вираз, що відображає залежність від  $x$  і  $y$ ;  $\text{exprf}$ ,  $\text{exprg}$  і  $\text{exprh}$  — вираження, що задають поверхню параметрично;  $s$ ,  $t$ ,  $a$  й  $b$  — числові константи дійсного типу;  $\text{end}$  — числові константи або вирази дійсного типу;  $x$ ,  $y$ ,  $s$  і  $t$  — імена незалежних змінних;  $p$  — керуючі параметри.

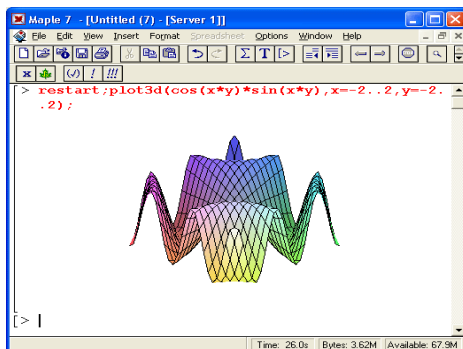


Рисунок 6.3 - Побудови графіка тривимірної поверхні

### 6.3. Конструювання рівняння з використанням пакета Derive

*Derive* — це додаток, призначений для будь-якого користувача — студента, викладача або професіонала, кому потрібно вирішувати будь-який тип завдань, пов'язаних з математикою. Програма може робити складні математичні і алгебраїчні вправи, швидко і безпомилково. Вона працює з матрицями і векторами за допомогою дуже простого інтерфейсу. Вона також будує будь-який тип графіка або подання. Завдання в області арифметики, алгебри, тригонометрії, обчислень, лінійної алгебри та обчислення висловлювань можуть бути вирішені одним клацанням миші. Програма будує двомірні і тривимірні графіки математичних виразів, використовуючи різноманітні системи координат. Вона обробляє алгебраїчні змінні, вирази, рівняння, функції, вектори, матриці та логічні вирази так само, як науковий калькулятор обробляє цифри.

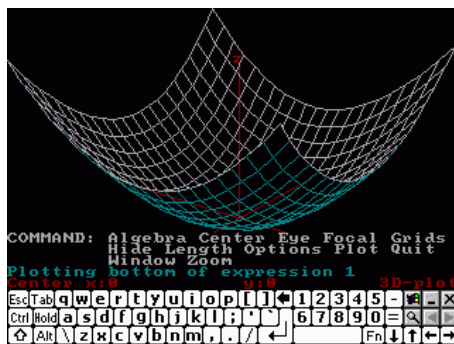


Рисунок 6.4 - Приклад побудови графіка функції двох змінних.

### 6.4. Конструювання об'єктів з використанням пакета MATLAB

*MATLAB* (Скорочення від англ. «MatrixLaboratory», в українській транскрипції вимовляється, як Матлаб) — пакет прикладних програм для вирішення завдань технічних обчислень і однойменний мова програмування. Який використовується в цьому пакеті. *MATLAB* використовують більше 1 000 000 інженерних і наукових працівників, він працює на більшості сучасних операційних систем, включаючи Linux, Mac OS, Solaris (Починаючи з версії R2010b підтримка Solaris припинена) і Microsoft Windows.

*MATLAB* як мова програмування був розроблений Клівом Моулером (англ. Cleve Moler) в кінці 1970-х років, коли він був деканом факультету комп'ютерних наук в Університеті Нью-Мексико. Метою розробки служила задача дати студентам факультету можливість використання програмних бібліотек Linpack і EISPACK без необхідності вивчення Фортрана. Незабаром новий мова поширилася серед інших університетів і був з великим інтересом зустрінутий вченими, які працюють в області прикладної математики. До сих пір в Інтернеті можна знайти версію 1982 року, Написану на Фортране, поширювану з відкритим вихідним кодом. Інженер Джон Літл (англ. John N. (Jack) Little) познайомився з цією мовою під час візиту Кліва Моулера в Стенфордський університет в 1983 році. Зрозумівши, що нова мова володіє великим комерційним потенціалом, він об'єднався з Клівом Моулером і Стивом Бангертом (англ. Steve Bangert). Спільними зусиллями вони переписали *MATLAB* на С і заснували в 1984 році компанію The Math Works для подальшого розвитку. Ці переписані на С бібліотеки довгий час були відомі під ім'ям JACKPAC. Спочатку *MATLAB* призначався для проектування систем управління (основна спеціальність

Джона Літгла), але швидко завоював популярність у багатьох інших наукових і інженерних областях. Він також широко використовувався і в освіті, зокрема, для викладання лінійної алгебри і чисельних методів.

Мова MATLAB є високорівневим інтерпретується мовою програмування. Що включає засновані на матрицях структури даних, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості і інтерфейси до програм, написаним на інших мовах програмування. Основною особливістю мови MATLAB є його широкі можливості по роботі з матрицями, які творці мови висловили в гаслі «думай векторно» (англ. Think vectorized).

MATLAB надає також зручні засоби для розробки алгоритмів, включаючи високорівневі з використанням концепцій об'єктно-орієнтованого програмування. У ньому є всі необхідні засоби інтегрованого середовища розробки, включаючи відладчик і профайлер. Функції для роботи з цілими типами даних полегшують створення алгоритмів для мікроконтролерів і інших додатків, де це необхідно.

Пакет MATLAB включає інтерфейс взаємодії з зовнішніми додатками, написаними на мовах C і Фортран. Здійснюється це взаємодія через MEX-файли. Існує можливість виклику підпрограм, Написаних на C або Фортране з MATLAB, як ніби це вбудовані функції пакета. MEX-файли являють собою спільні бібліотеки, Які можуть бути завантажені і виконані інтерпретатором, вбудованим в MATLAB. MEX-процедури мають також можливість викликати вбудовані команди MATLAB.

Для MATLAB є можливість створювати спеціальні набори інструментів (англ. tool box), що розширюють його функціональність. Набори інструментів є колекції функцій, написаних на мові MATLAB для вирішення певного класу задач. Компанія Math works поставляє набори інструментів, які використовуються в багатьох областях, включаючи нижче наступні:

- Цифрова обробка сигналів, Зображень і даних: DSPToolbox, Image Processing Toolbox, Wavelet Toolbox, Communication Toolbox, Filter Design Toolbox — набори функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр завдань обробки сигналів, зображень, проектування цифрових фільтрів і систем зв'язку.
- Системи управління: Control Systems Toolbox,  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox, Robust Control Toolbox, System Identification Toolbox, LMI Control Toolbox, Model Predictive Control Toolbox, Model-Based Calibration Toolbox — набори функцій, що полегшують аналіз і синтез динамічних систем, Проектування, моделювання і ідентифікацію систем управління, включаючи сучасні алгоритми управління, такі як Робастное керування,  $H_\infty$ -управління, ЛМН-синтез,  $\mu$ -синтез та інші.
- Фінансовий аналіз: GARCH Toolbox, Fixed-Income Toolbox, Financial Time Series Toolbox, Financial Derivatives Toolbox, Financial Toolbox, Datafeed Toolbox — набори функцій, що дозволяють швидко і ефективно збирати, обробляти і передавати різну фінансову інформацію.
- Аналіз і синтез географічних карт, включаючи тривимірні: Mapping Toolbox.
- Збір і аналіз експериментальних даних: Data Acquisition Toolbox, Image Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Linkfor Code Composer Studio — набори функцій, що дозволяють зберігати і обробляти дані, отримані в ході експериментів, в тому числі в реальному часі. Підтримується широкий спектр наукового і інженерного вимірювального обладнання.
- Візуалізація і уявлення даних: Virtual Reality Toolbox — дозволяє створювати інтерактивні світи і візуалізувати наукову інформацію за допомогою технологій віртуальної реальності і мови VRML.
- Засоби розробки: MATLAB Builder for COM, MATLAB Builder for Excel, MATLAB Builder for NET, MATLAB Compiler, Filter Design HDL Coder — набори функцій, що дозволяють створювати незалежні програми з

середовища MATLAB.

- Взаємодія з зовнішніми програмними продуктами: MATLAB Report Generator, Excel Link, Database Toolbox, MATLAB Web Server, Linkfor Model Sim — набори функцій, що дозволяють зберігати дані в різних видах таким чином, щоб інші програми могли з ними працювати.
- Бази даних: Database Toolbox — інструменти роботи з базами даних.
- Наукові та математичні пакети: Bioinformatics Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Fixed-Point Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox, OPC Toolbox, Optimization Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Spline Toolbox, Statistic Toolbox, RF Toolbox — набори спеціалізованих математичних функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр наукових і інженерних задач, включаючи розробку генетичних алгоритмів, Рішення задач в приватних похідних, Цілочисельні проблеми, оптимізацію систем та інші.
- Нейронні мережі: Neural Network Toolbox - інструменти для синтезу та аналізу нейронних мереж.
- Нечітка логіка: Fuzzy Logic Toolbox - інструменти для побудови і аналізу нечітких множин.
- Символьні обчислення: Symbolic Math Toolbox — інструменти для символьних обчислень з можливістю взаємодії з символьним процесором програми Maple.
- Крім перерахованих вище, існують тисячі інших наборів інструментів для MATLAB, написаних іншими компаніями і ентузіастами.

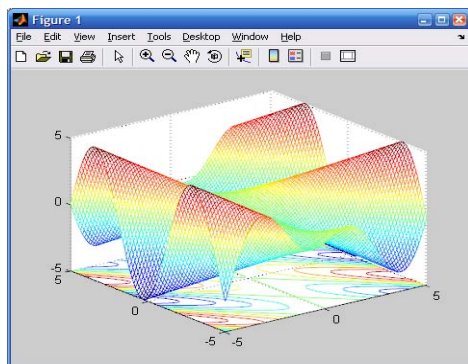


Рисунок 6.5- Графік поверхні

## 6.5.Конструювання об'єктів з використанням пакета MathCAD

Система MathCAD по праву називається сучасної універсальної масової математичної системою для всіх користувачів. Відмінною рисою інтегрованих математичних систем MathCAD, розробником яких є фірма MathSoft (США), є підготовка документів, в яких об'єднуються завдання вихідних даних, математичний опис їх обробки і результати обчислень у вигляді числових даних, таблиць і графіків.

У MathCAD вдало вирішена проблема передачі змін числових даних по всьому ланцюжку обчислень. Текст документа MathCAD майже нічим не відрізняється від тексту наукових статей. Графічне середовище програми дозволяє записувати математичні формули в звичному вигляді.

MathCAD є повноцінним Windows додатком з вбудованими засобами обміну. Цей пакет має природний вхідна мова уявлення математичних залежностей і інструменти для їх набору.

Система дозволяє виконувати як чисельні, так і аналітичні (символьні) обчислення, має надзвичайно зручний математичний інтегрований інтерфейс і прекрасні засоби наукової графіки. Вбудований текстовий процесор дозволяє оформити текст документа без застосування Word.

MathCAD призначений, зокрема, для:

- проведення розрахунків з дійсними і комплексними числами;
- рішення лінійних і нелінійних рівнянь і систем рівнянь;
- спрощення, розгортання і угруповання виразів;
- транспонування, обернення матриць, обчислення визначника;
- побудови двовимірних і тривимірних графіків;
- оформлення науково-технічних текстів, що містять складні формули;
- диференціювання і інтегрування, аналітичного та чисельного;
- проведення статистичних розрахунків та аналізу даних.

Текстовий редактор системи не має всі можливості спеціалізованих редакторів тексту, проте дозволяє коригувати тексти, вирівнювати їх по краю, переміщати текстові блоки в будь-яке місце документа і т.д.

Математичний інтерпретатор системи - найбільш цікава її частина. Математичні формули, що підлягають інтерпретації, записуються в загальноприйнятому вигляді. Для введення формул використовуються шаблони, що вводяться певними комбінаціями клавіш. Є можливість зміни формату представлення чисел, наприклад числа знаків після розділової точки, похибки обчислень і позначення уявної одиниці ( $i$  на  $j$  і навпаки) при операціях з комплексними числами. Крім роботи з десятковими числами існують можливість роботи з восьми — і шестнадцатерічними числами. Так само є набір процедур для можливості функціонування не тільки над числами, векторами або матрицями, але і над більш складними об'єктами, таких як дерева, списки або набори.

У пакеті широко використовуються вбудовані функції. До основних вбудованих функцій відносяться тригонометричні і зворотні, гіперболічні і зворотні, експоненціальні і логарифмічні, статистичні, Фур'є, Бесселя, комплексних змінних.

MathCAD дозволяє будувати найрізноманітніші графіки: в декартовій і в полярній системі координат, з масштабною сіткою і без неї, з лінійним і логарифмічним масштабом, з відміткою ліній прямокутниками, хрестами, ромбами і т.д. Завдання виду і розміру графіка здійснюється введенням відповідного формату (рис.6.6). Графіки можна переміщати в будь-яке місце документа, зазначене положення курсора, вони можуть мати будь-які розміри.

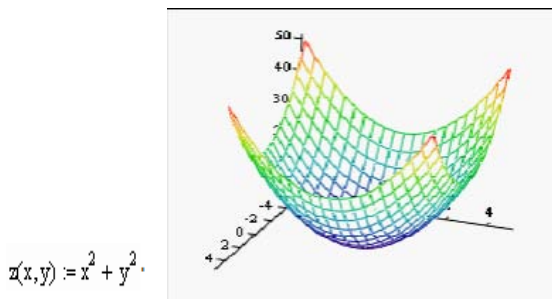


Рисунок.6.6



## 6.6. Висновки

Програма Maple корпорації Waterloo MapleInc — патріарх в світі систем комп'ютерної математики. Ця система, яка здобула собі світову популярність і величезну популярність, є однією з кращих серед систем символічної математики, що дозволяють вирішувати математичні завдання в аналітичному вигляді.

Не варто забувати, що Maple багатогранна, вона може застосовуватися для вирішення найсерйозніших математичних задач аеродинаміки, теорії поля, теплопровідності і дифузії, теоретичної механіки, з іншого боку, Maple використовують для створення web-сторінок - основи Інтернету.

Математичні пакети, такі як Mathcad, Maple, Mathematica, добре пристосовані до проведення розрахунків в природничо-наукових дисциплінах, коли модель задана в аналітичній формі. Зручність варіювання параметрів в поєднанні із заздалегідь визначеною процедурою обробки і візуалізації результатів істотно полегшує дослідження. У таких різноманітних розрахунках накладні витрати, пов'язані з написанням спеціальної програми на мові пакету, що управляє експериментом, окупаються тією легкістю, з якою можливо повторити все обчислення заново при внесенні змін у вихідну модель. Програмування зводиться до написання відносно невеликих за обсягом програм, що складаються в основному з макрооператоров.

З точки зору моделювання мехатронних об'єктів основних і, мабуть, єдиним достоїнством систем комп'ютерної математики є математична прозорість обчислень і легкість створення об'єктів, які здійснюють математичні обчислення. До числа недоліків можна віднести відсутність таких принципово важливих можливостей, як:

- автоматизація побудови математичної моделі;
- компонентне моделювання із застосуванням досить великої кількості типових блоків;
- швидка модифікація моделі;
- створення предметно-орієнтованого середовища;
- оперативну зміну методу моделювання і т.д.

В результаті, застосування систем комп'ютерної математики обмежується рішенням простих завдань, або завдань, де головне — прозорість обчислень.

### Контрольні питання.

1. Як отримати передавальну функцію по лінійним диференціальним рівнянням системи?
2. За допомогою яких операцій (функцій) будуються в Matlab моделі паралельного і послідовного з'єднань, системи зі зворотним зв'язком?
3. Як визначаються запаси стійкості по амплітуді і по фазі? Що означають ці величини? В яких одиницях вони вимірюються?
4. Які можливості надає модуль SISOTool?
5. Що таке:
  - кореневої годограф;
  - перерегулювання;
  - час перехідного процесу?
6. Що таке астатическая система? Що таке порядок астатизма?
7. Основні поняття теорії динамічних систем в евклідовому просторі.
8. Стійкі руху динамічних моделей. Основні поняття теорії стійкості по Ляпунову.
9. Опишіть можливості MathCAD.
10. Опишіть інтерфейс MathCAD.
11. Які види масивів існують в MathCAD?
12. Які інструментальні засоби є в MathCAD для побудови графіків?
13. Що таке «комп'ютерна математика»?

14. Класифікація засобів комп'ютерної математики?
15. Особливості систем комп'ютерної математики?
16. Елементи теорії математичного моделювання динамічних об'єктів. Метричні і нормовані простору.
17. Елементи теорії математичного моделювання динамічних об'єктів. Оператори і функціонали в метричних просторах.
18. Основні поняття теорії динамічних систем в евклідовому просторі.
19. Стійкі руху динамічних моделей. Основні поняття теорії стійкості по Ляпунову.
20. Два базових методу побудови математичних моделей. Завдання ідентифікації.
21. Застосування методів оптимізації в математичному моделюванні.
22. Параметрична оптимізація із завданням допустимої динамічної області.
23. Основні елементи пакета Maple. Операції з матрицями і поліномами.
24. Елементарна графіка в пакеті Maple. Основи програмування на мові Maple.
25. Що таке Derive?
26. Які опції є в Derive?

## Лекція 10

### ТЕМА 7. Вступ в особливості тривимірного моделювання

#### 7.1. Поняття, види дизайну і його місце в сучасному суспільстві

##### 7.1.1. поняття дизайну

Поняття «дизайн» походить від італійського «disegno» - в епоху Ренесансу під цим словом розуміли різні проекти і малюнки.

Початкове визначення дизайну виникло в Англії в XVI ст. і означало — «Схема», «креслення», «начерк».

Як професійна діяльність дизайн почав формуватися в Наприкінці XIX в. Промислова революція і науково-технічний прогрес зумовили створення різних виробів у великих кількостях і привели до конкуренції, внаслідок чого виникла потреба у фахівці, здатному створити не тільки привабливий зовнішній вигляд, але і розбирається в технологіях виробництва.

Існує кілька ключових подій, які посприяли виникненню сучасної дизайнерської діяльності:

1. 1906 рік - перша міжнародна художньо-промислова виставка в Дрездені;
2. 1907 рік - німецький художник архітектор і дизайнер Петер Беренс створює фірмовий стиль компанії;
3. 1929 рік -ряд художників (Раймонд Лоуї, Генрі Дрейфус і. Т.д.) починають працювати на американських промисловців, які відчують труднощі зі збутом продукції.
4. У 1907 році, в Німеччині, створюється виробничий союз «Веркбунд» об'єднав промисловців, архітекторів, художників і комерсантів. Своїми завданнями вони ставлять: реорганізацію ремісничого виробництва, створення зразків для промислового виробництва, боротьбу з прикрасами і орнаментациєю.
5. У 20-х роках XX ст. з'являються перші школи дизайну. У Німеччині -вищого Школа Художнього Конструювання і Індустріального Будівництва Баухауз.

У школах дизайну розвивалися два напрямки: функціоналізм і конструктивізм.

1. Принцип функціоналізму: «що функціонально, то красиво».

Його послідовники прагнули передати красу художньої форми в її функціональній доцільності.

2. Принцип конструктивізму: «Все - є гра чистих форм». Композиція будується на сполученнях плоских або об'ємних геометричних форм, які виражаються через суворі правила масштабності, ритму, контрасту.

Подальший розвиток призводить до дуалістическому відношенню до дизайнерської діяльності.

Один з перших теоретиків дизайну, мистецтвознавець Герберт Рід (1893 -1968), трактував дизайн як вищу форму мистецтва, незалежну сверхпрофесію, вільну від вузькоспеціалізованого професіоналізму.

Ф. Ч. Ешфорд - теоретик дизайну, який написав книгу «Дизайнерське проектування для промисловості», вважав, що дизайн служить виключно для задоволення очікувань масового споживача.

Єдина мета дизайну - отримання прибутку за допомогою гарного збуту товару.

Таким чином, в дизайнерській діяльності виникли неминучі протиріччя: з одного боку обслуговування запитів і потреб споживачів (Забезпечення комерційного успіху), а з іншого - вільне самовираження художника (область сучасного мистецтва).

Виходячи з перерахованих суперечностей, можна зробити висновок про те, що саме боротьба протилежностей в дизайні дозволяють цього виду діяльності розвиватися і знаходити нові рішення, балансуючи між споживанням і творчістю.

Наведемо кілька визначень дизайну:

1. Визначення, прийняте в 1964 році міжнародним семінаром по дизайнерським утворенню: "Дизайн - це творча діяльність, метою якої є визначення формальних якостей промислових виробів.

Ці якості включають і зовнішні риси виробу, але головним чином ті структурні і функціональні взаємозв'язки, які перетворюють виріб у єдине ціле, як з точки зору споживача, так і з точки зору виготовлювача".

2. Дизайн - проектно-художня діяльність з розробки промислових виробів з високими споживчими і естетичними якостями, з метою організації комфортного для людини предметної середовища - житловий, виробничий і т.д.

Теоретичною базою дизайну є технічна естетика - область художньої творчості, пов'язана сконструйовані і випуском промислової продукції. На підприємстві, в процесі виробництва різних промислових виробів, художники-конструктори впритул працюють з інженерами-конструкторами і технологами.

Метою дизайну є забезпечення гармонійного поєднання функціональних властивостей і естетичних характеристик промислових виробів. Основними критеріями дизайнерської діяльності є зручність і комфорт укупі з дешевизною виробу і детальної продуманістю його форми. Як правило, всі елементи якого-небудь промислового виробу повинні складати єдине ціле і представляти фірму, що створила цей промисловий виріб (напр.: автомобіль).

Наукою вивчає наведені вище критерії є ергономіка (Грец. "Ergon" - робота, "nomos" - закон) - створення комфортного середовища проживання людини. Ергономіка є комплексною наукою. вона включає в себе такі науки як: психологія, фізіологія, анатомія, біомеханіка, антропологія і т.д. Комплексні, функціональні виробу іменуються ергономічними. Прикладом може служити організація офісного місця службовця, яке включає в себе комфортабельне крісло, зручне розташування комп'ютера та підручних канцелярського матеріалів.

Першими дизайнерами були художники, згодом ця професія еволюціонувала і від дизайнера потрібна була не тільки вміння малювати ескізи проєктованих виробів.

Мислення професійного дизайнера можна помістити в умовному трикутнику, гранями якого є: образне мислення художника, системне мислення вченого і інноваційне мислення винахідника (рис.7.1).

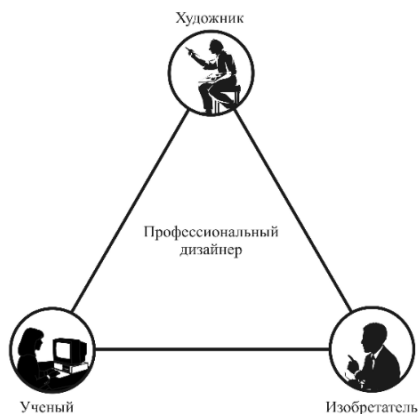


Рисунок 7.1

Крім того, дизайнер повинен прагнути до зниження вартості виробництва різних виробів за рахунок застосування найбільш вигідних матеріалів і спрощення технології. Сучасний дизайнер представляє собою інтелектуальну і креативну особистість, і, крім проектування різноманітної продукції, часто несе відповідальність за реалізацію розроблених ним виробів.

### 7.1.2 Види дизайну

Існують чотири основних види дизайнерської діяльності:

1. Графічний дизайн — створення різної візуально-інформативної продукції. В основному, застосовується при створенні рекламних матеріалів (плакати, буклети, календарі, рекламні відеоролики і т.д.).
2. Промисловий дизайн — проектування і створення промислово вироблених виробів. В процесі проектування враховується зовнішній вигляд виробу, його структурні і функціональні особливості.
3. Ландшафтний дизайн — створення та організація садово-паркових насаджень, а також використання різних малих архітектурних форм (Пам'ятники, фонтани і т.д.).
4. Дизайн інтер'єру — створення комфортного житлового та робочого простору.

### 7.1.3 Процес дизайнерського проектування

На зорі дизайнерської діяльності проектуванням виробів займалися окремі особистості або невеликі групи людей. З часом ситуація змінилася, з'явилися великі компанії в яких існує свій укомплектований штат дизайнерів (наприклад: штат відділу дизайну компанії «Дженерал моторс» перевищує тисячу осіб).

Процес проектування промислових виробів:

1. Створення ескізів майбутнього виробу. Після створення значного кількості ескізів, вибираються найбільш вдалі.
2. Створення і перевірка моделей і дослідних зразків.
3. Обмежений випуск першої партії виробів. після експлуатації експериментальної партії вноситься наступна коригування

## 7.2 Моделі зображень. Комп'ютерний дизайн. Можливості інтегрованого використання графічних 3-D редакторів.

### 7.2.1 Моделі зображень.

## **7.2 Моделі зображень. Комп'ютерний дизайн. Можливості інтегрованого використання графічних 3-D редакторів.**

### **7.2.1 Моделі зображень.**

У комп'ютерній графіці використовується три види моделей: піксельна (точкова) модель зображення, векторна (об'єктна) модель зображення і сітчаста (полігональних) модель.

#### **7.2.1.1 Піксельна модель.**

У піксельній моделі зображення являє собою растр - сітку, що покриває собою всю площину зображення. Всі осередки сітки мають однакові форму і розміри. Частина зображення, розміщена в межах одного осередку растра, називається пікселем або точкою. Якість зображення залежить від кількості пікселів в одній комірці растра і характеризується параметром dpi- dots per inch (кількість точок на дюйм). Крім дозволу (кількості точок на дюйм) зображення має свої розміри, які також впливають на його якість.

Одним із способів перевірки якості зображення є масштабування. Хороші зображення можна збільшити на 15-20% без втрати якості. У разі якщо отмасштабовані зображення з поганим якістю, з'явиться характерна зернистість (рис. 7.2).

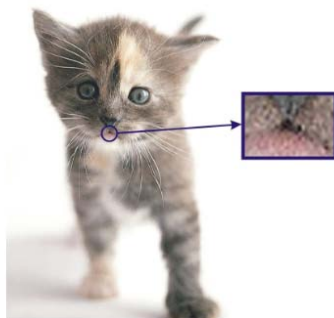


Рисунок 7.2. Піксельний зображення

Для зберігання в комп'ютері архівів фотографій і зображень досить дозволу 75dpi, для друку та дизайнерської діяльності бажано дозвіл 150-300 dpi. Для обробки растрових зображень найбільш часто використовується програма Adobe Photoshop.

Працюючи з зображеннями в спеціалізованих програмах ви можете, в основному, змінювати кольорову і тональну складові. Крім цього можливо прибрати різні незначні дефекти (пил, подряпини), зробити зображення монохромним, стилізувати його і незначно отмасштабовані без втрати якості. Використовуючи шари, можна комбінувати різні твори, створюючи колажі. За допомогою спеціальних програм (CorelTRACE) растрові зображення можна переробляти в векторні.

#### **7.2.1.2 Векторна модель**

Векторна модель являє собою розімкнуті лінії або замкнуті контура, з яких складається зображення (рис. 7.3).

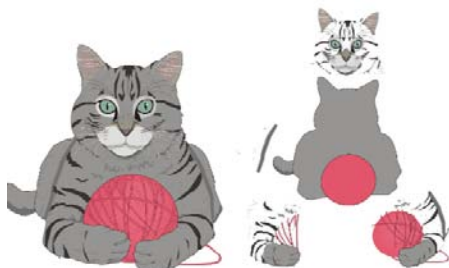


Рисунок 7.3 Векторне зображення

Векторні об'єкти називаються параметричними, внаслідок того, що мають індивідуальні параметри: ім'я, геометричні і колірні характеристики. Для створення векторних зображень найбільш часто використовується програма CorelDRAW.

За допомогою векторної графіки зручно створювати логотипи і різні схеми. Будь-який з об'єктів векторного зображення можна перетворювати (переміщати, масштабувати, змінювати значення атрибутів) без втрати якості, на відміну від піксельного зображення.

Після створення, векторне зображення можна перетворити в растрове

#### 7.2.1.3 Сетчатая (полігональна) модель

Полігональна модель являє собою об'ємне тіло, що складається з полігонів (багатокутників). Як правило, закінчений об'єкт є сукупністю складових його частин. На малюнку представлена модель риби, що складається з тіла, очей і зубів (рис. 7.4). після створення об'єкта його обтягують текстурами, які є спеціально створеними піксельними зображеннями.

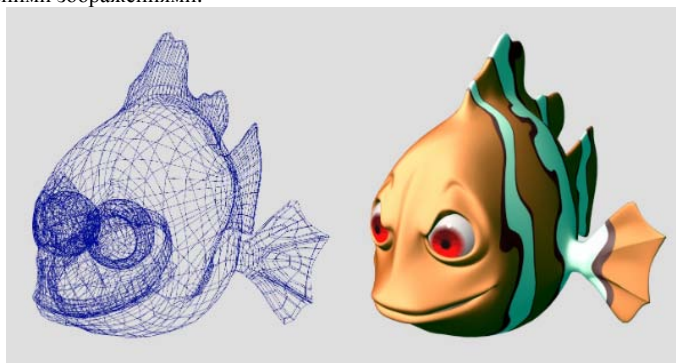


Рисунок 7.4 Полігональна модель

Створені моделі можна видозмінювати шляхом деформації та додавання складових частин, а також, працюючи з текстурами і матеріалами.

Після створення тривимірної сцени, вона візуалізується в піксельний зображення або в відеоролик. Для того щоб створити реалістичне зображення, необхідно створити якісну модель, застосувати реалістичні матеріали і використовувати альтернативні джерела освітлення і візуалізації. Крім полігонального моделювання існують інші способи створення тривимірних моделей, наприклад NURBS-моделювання і т.д.

## 7.2.2 Типи файлів

Для того щоб професійно займатися комп'ютерним дизайном, необхідно знати основні типи файлів, які використовуються в різних графічних редакторах. Крім того, в залежності від подальшого використання піксельного зображення його необхідно зберігати в відповідному форматі.

Типи файлів для зберігання растрових зображень		
No	розширення	опис
	JPEG	Найпоширеніший формат в цифровій фотографії та всесвітньої мережі Інтернет, оскільки при досить хорошій якості дані файли займають трохи места. JPEG (Joint Photographic Experts Group) є архівним форматом. Розпакування даних, що містяться в файлах цього формату, виконується автоматично під час їх відкриття. Оскільки використовуваний при створенні файлів формату JPEG метод стиснення частково руйнує інформацію вихідного зображення, застосування цього формату в поліграфічних проектах не рекомендується.
	TIFF	Формат TIFF (Tagged Image File Format) розроблявся як універсальний формат для зберігання результатів сканування кольорових зображень. Він є одним з найпоширеніших і надійних графічних форматів, з ним можуть працювати практично всі графічні програми. TIFF-найбільш підходящий формат для експорту піксельних зображень в програми векторної графіки. Файл цього формату може містити в собі піксельний зображення в різних кольірних моделях, а також альфа-канали, шари і інші додаткові дані
	BMP	Формат BMP був розроблений як основний графічний формат для операційної системи Windows. Він передбачає зберігання тільки зображень, що використовують модель кольору без будь-якого стиснення, через що формат BMP рідко застосовується в художній графіці і в видавничій практиці
	PSD	Формат PSD (Adobe PhotoShop Document) - формат зберігання графічних файлів Програми Adobe Photoshop. Зберігає інформацію про шари, кольірних каналах, масках і т.д. Недоліком є відсутність ефективного алгоритму стиснення інформації, що призводить до великого об'єму файлів.
	GIF	GIF (Graphics Interchange Format) був розроблений спеціально для передачі піксельних графічних зображень в глобальних комп'ютерних мережах. Даний формат дозволяє побачити чорнову версію зображення - Вікно web-оглядача задовго до того, як воно буде завантажено повністю. Ще одна перевага формату GIF полягає в тому, що він динамічний і може являти собою анімацію (GIF-Анімація). Основний недолік формату GIF формату- обмеженість кольору (256 кольорів), тому його не рекомендують використовувати в поліграфії
	PNG	Формат PNG (Portable Network Graphics) був розроблений для заміни в Інтернеті застарілого формату GIF. Підтримуються три типи зображень -кольорові з глибиною 8 або 24 бита і чорно-біле з градацією 256 відтінків сірого. Стиснення інформації відбувається практично без втрат
Типи файлів для зберігання векторних зображень		
	Cdr	Формат зберігання даних програми CorelDraw 8.
	wmf	Формат зберігання векторних зображень операційної системи Windows. До недоліків можна віднести відсутність коштів для роботи з кольорними палітрами, прийнятими в поліграфії

Комбіновані типи файлів		
	eps	Формат Encapsulated Post Script не тільки представляє піксельні зображення, область його застосування значно ширше - Опис документів, що містять текстову і графічний інформацію, як в піксельної, так і в векторній формі
	PDF	Portable Document Format- призначений для створення електронної документації (книги, документація, реферати і т.д.). Документи можуть включати в себе текст, шрифти, зображення та векторну графіку. Потужний алгоритм стиснення забезпечує компактність файлів при високій якості ілюстрацій. Для перегляду документів у форматі PDF використовується програма Adobe Acrobat
Типи файлів для зберігання тривимірних об'єктів		
	max mb 3ds, obj	Формат зберігання даних програми Autodesk 3D Studio Max. Формат зберігання даних програми Autodesk Maya. Формати, за допомогою яких здійснюється імпорт / експорт створених тривимірних моделей в різні редактори тривимірного моделювання

### 7.2.3 Спільне використання різних графічних редакторів.

Для створення кінцевого продукту, будь то проектування інтер'єру, рекламний плакат або відеоролик, часто використовується кілька графічних програм, в яких створюється певна частина зображення, а потім вони збираються разом.

Розглянемо приклад створення макета пляшки з етикеткою, використовуючи різні графічні програми:

1. Створюємо макет самої пляшки, використовуючи графічну програму Autodesk 3D Studio Max. Для створення реалістичного матеріалу скла використовується модуль V-Ray (рис. 7.5).



Рисунок 7.5

2. У програмі Corel Draw створюємо логотип для етикетки пляшки (рис.7.6).



Рисунок 7.6



3. У графічній програмі Adobe Photoshop створюємо етикетку для пляшки (рис.7.7).



Рисунок 7.7

4. Використовуючи графічну програму Autodesk 3D Studio Max, накладасмо етикетку на пляшку і візуалізуємо кінцеве зображення (рис. 7.8).



Рисунок 7.8

Для створення різних проектів не обов'язково діяти по описаним вище алгоритмом або використовувати різні програми, все залежить від бажання і майстерності самого дизайнера. Але, як показує досвід, часто доводиться це робити.

### **7.3 Особливості тривимірного моделювання. Види тривимірних редакторів.**

3D (3Dimensional) моделювання передбачає роботу в трьох вимірах -все предмети характеризуються трьома параметрами: шириною, глибиною і висотою. Користувач, який працює з 3D програмами, стає подібний до скульптору, віртуально оперує об'ємними тілами і інструментами для їх редагування.

#### **7.3.1 Області застосування тривимірного моделювання.**

У зв'язку зі стрімким зростанням потужності комп'ютерних технологій з'явилася можливість створювати віртуальні об'єкти, максимально схожі на реалістичні аналоги.

Цілком закономірно, що технології тривимірного моделювання стали широко застосовуватися в тих сферах, де превалює створення ефектною і реалістичною візуальної інформації, а саме кінематограф, мультиплікація і рекламна діяльність.

### **7.3.1.1. Основні області застосування тривимірного моделювання:**

1. Візуальні ефекти, мультиплікація, комп'ютерна індустрія.

Завдяки потужному обладнанню та програмного забезпечення з'явилася можливість створювати різні предмети (наприклад: автомобіль і т.д.) не тільки максимально реалістичними, але і мають реальні фізичні властивості (плинність, пружність, тертя і т.д.). З'явилася можливість створювати реалістичні водні поверхні, навколишнє середовище, різні піротехнічні ефекти. Це призвело до того, що акторів стали знімати на статичному одноколірному тлі, а потім накладати їх на повністю створене віртуальне оточення. Також стало можливо створювати персонажі, які реалістично переміщуються в віртуальному просторі, а також, використовуючи об'ємне сканування, створювати віртуальних персонажів схожих на реальних людей (рис. 7.9).



Рисунок 7.9

Тривимірна мультиплікація, в зв'язку з більш простим способом створення (не потрібно вручну малювати кожен кадр) стала переважати над мальованою.

**7.3.1.2. Проектування і дизайн.** Створення віртуальних моделей для всіх видів дизайну, будь то дизайн інтер'єру та екстер'єру, поліграфічний дизайн, а також промисловий дизайн. Однією з можливостей проектування є накладення створеної віртуальної моделі на реально існуючий пейзаж. Наприклад: На фотографію можна накласти створений віртуальний будинок, з метою того щоб подивитися, як він впишеться в навколишній простір (рис. 7.10)



Рисунок 7.10

### 7.3.2 Конструкторське і художнє моделювання.

Умовно, об'ємне моделювання можна розділити на два види:

1. Художнє моделювання;
2. Конструкторське - твердотільне моделювання (solid modeling).

У художньому моделюванні превалює зовнішній вигляд створюваного об'єкта, його художній образ (рис. 7.11).



Рисунок 7.11 Художнє моделювання

Твердотільне моделювання служить для розробки конкретних фізичних моделей і процесів, що відбуваються в об'єктивній реальності.

Наприклад: симулятори для навчання водіїв і пілотів, перевірка різних систем на міцність і т.д. Тому на першому місці тут не естетика, а точний фізичний расчет. Так, наприклад, в програмі Ansys створюється модель з урахуванням всіх фізичних параметрів (вага, щільність, пружність, міцність і т.д.), а потім до даної моделі можна, в певних частинах, докласти зусилля, щоб переглянути її на міцність, або змоделювати будь-якої внутрішній або зовнішній дефект (рис. 7.12).

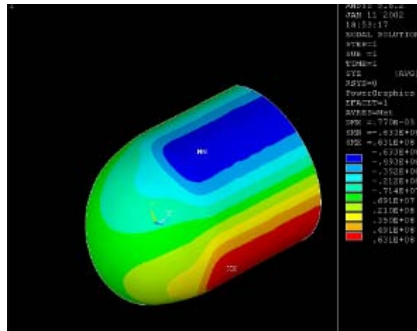


Рисунок 7.12 Моделювання в програмі

CAD / CAM системи (computer-aided design - автоматизоване проектування / computer-aided manufacturing-автоматизоване виробництво) дозволяють створювати різні креслення і об'ємні деталі згідно всім необхідним нормативам.

Обидва види моделювання можуть застосовуватися в промисловому дизайні.

Наприклад: Необхідно створити реалістичну модель автомобіля (художні недержавні редактори), зробити відповідні креслення (CAD / CAM системи) і провести перевірку різних частин на міцність (solid modeling).

Завдяки значному зростанню комп'ютерних технологій, з'явилася можливість створювати в художніх 3D-редакторах різні об'єкти і ефекти з урахуванням фізичних властивостей (реалістичні водні поверхні, створення пружних і твердих тіл). Дані динамічні об'єкти використовуються виключно для створення ефектних візуальних ефектів і відеороликів, а не для дослідження різних властивостей об'єктів.

**7.3.3 Види тривимірних редакторів.** Практично всі графічні редактори мають порівняно схожий інтерфейс (рис. 7.13) і інструментарій для моделювання, але розрізняються своїми специфічними можливостями, а також алгоритмами проррахунку освітлення, створення анімації і візуалізації зображення.

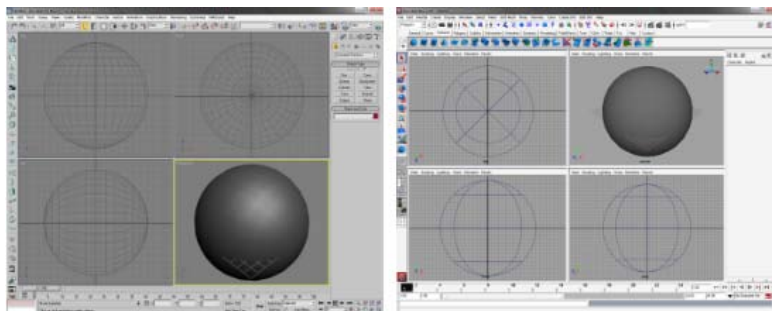


Рисунок 7.13 Інтерфейс програм Autodesk 3D Studio Max (зліва) і Autodesk Maya (праворуч)

Не існує однозначної відповіді, який редактор краще, а який гірше, у кожного користувача є свої пріоритети в цьому питанні.

Дуже багато залежить від того, як добре він знайомий з тим редактором, в якому працює і від його творчих можливостей (крім знання інструментарію бажано володіти художніми навичками, знанням колориту, композиції і т.д.). Тому дизайнер сам вирішує, якій програмі віддавати перевагу.

#### **7.3.3.1. Коротка характеристика основних програм тривимірного моделювання:**

1. Autodesk 3D Studio Max-найбільш поширений, а також порівняно легкий в освоєнні графічний пакет. пагін Vray дозволяє створювати реалістичні об'єкти і інтер'єри.

2. Autodesk Maya-серйозний графічний пакет, що має низку переваг в порівнянні з іншими. До них відносяться: Моделювання при допомоги subdiv primitives, зручна робота з матеріалами, можливість малювати різні ефекти на змодельованому об'єкті, розвинена система анімації і т.д. Широко використовується при створенні реалістичних інтер'єрів, персонажів, а також візуальних ефектів для кінофільмів і ігрової індустрії.

3. Maxon Cinema 4D- німецький графічний пакет зі зручним і інтуїтивним інтерфейсом. Має свій унікальний алгоритм проррахунку тіней для складних сцен при малому завантаженні оперативної пам'яті. Модуль Body Paint 3D дозволяє розфарбовувати моделі безпосередньо на видових екранах.

4. NewTek LightWave 3D- графічний пакет з надзвичайно зручним анімаційним інструментарієм і високою якістю рендеринга. зручний для створення тривимірної графіки в телевізійному форматі.

Крім повноцінних програм існують, так звані, прикладні пакети. Вони орієнтовані на створення вузькоспеціалізованих функцій, які допоможуть створити повноцінну сцену в одному з перерахованих вище редакторів. Наприклад, програма

Curious Labs Poser орієнтована на роботу з вже готовими персонажами і подальший імпорт в інші графічні редактори.

DAZ Bryce-графічний редактор для створення віртуальних природних ландшафтів.

Досвідчений користувач для створення свого проекту часто використовує кілька програм тривимірного моделювання. Зокрема, дуже зручною є програма ZBrush, яка дозволяє моделювати об'єкти шляхом малювання на них різними кистями з використанням графічного планшета. Модель персонажа можна створити в одному з тривимірних редакторів, а потім імпортувати в ZBrush і доопрацювати (Додати зморшки, складки і т.д.).

**7.3.4 Алгоритм створення тривимірної сцени.** Створення будь-якої тривимірної сцени, як правило, відбувається за наступним алгоритмом:

1. Попередня підготовка: Використовуючи художні засоби, створюються ескізи проєктованого об'єкта або ж всієї сцени, розкадровка відеороликів. Це необхідно для того, щоб продумати якими засобами будуть створитися об'єкти сцени (рис. 7.14).

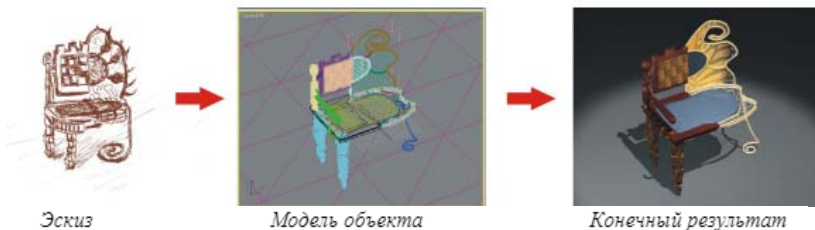


Рисунок 7.14

2. Моделювання об'єктів: Створюються полігональні моделі, причому створена модель повинна мати правильну геометрію і певну кількість полігонів. Зайва деталізація може призвести до повільної роботи комп'ютера.

3. Підготовка та призначення матеріалів: створеним об'єктам присвоюються різні матеріали, а також процедурні шейдери, які дозволяють створити реалістичні алгоритми відображення / заломлення освітлення від різних об'єктів.

4. Налаштування освітлення і камер: Розстановка джерел освітлення (Для створення реалістичного освітлення використовується глобальна освітленість (Global illumination), при якій об'єкти висвітлені не тільки прямими променями світла від різних джерел, але і променями світла, багаторазово відбитими від інших об'єктів сцени), а також розстановка або анімація камер, з позицій найбільш вигідних ракурсів.

5. Візуалізація (Rendering) сцени: Створюється закінчене зображення створеного об'єкта або сцени у вигляді піксельного зображення або відеоролика (рис. 7.14)

**7.3.5. Конструювання об'єктів з використанням пакета Autodesk 3ds Max (раніше 3D Studio MAX).** Autodesk 3ds Max (Раніше 3D Studio MAX) — повнофункціональна професійна програмна система для створення і редагування тривимірної графіки і анімації, допрацьована компанією Autodesk. Містить найсучасніші засоби для художників і фахівців в області мультимедіа. Працює в операційних системах Microsoft Windows і Windows NT (як в 32-бітових, так і в 64-бітних). У квітня 2013 випущена шістнадцята версія цього продукту під назвою «Autodesk 3ds Max 2014». Написана на C # (WPF), також використовує бібліотеку DeveloperExpress (DevExpress). Autodesk 3ds Max доступний в двох ліцензійних версіях: студентська — безкоштовна (потрібна реєстрація на сайті Autodesk), яка надає повну версію програми (проте, її не можна використовувати з метою отримання

прибутку). Перша версія пакету під назвою 3D Studio DOS була випущена в 1990 році. Розробками пакету займалася незалежна студія YostGroup, створена програмістом Гарі Йост; Autodesk на перших порах займався тільки виданням пакета. Перші чотири релізу носили найменування 3D Studio DOS (1990-1994 роки). Потім пакет був переписаний заново під Windows NT і перейменований в 3D Studio MAX (1996-1999 роки). Нумерація версій почалася заново. У 2000-2004 роках пакет випускається під маркою Discreet 3dsmax, а з 2005 року — Autodesk 3ds MAX. Актуальна версія носить назву Autodesk 3ds MAX 2014 (індекс 16.0). Нумерація версій почалася заново. У 2000-2004 роках пакет випускається під маркою Discreet 3dsmax, а з 2005 року — Autodesk 3ds MAX. Актуальна версія носить назву Autodesk 3ds MAX 2014 (індекс 16.0).

Програма володіє інтерактивним об'єктно-орієнтованим інтерфейсом, реалізує розширені можливості створення і управління анімацією, зберігає історію життя кожного об'єкта, надає можливості для створення різноманітних світлових ефектів і має відкриту архітектуру, що дозволяє розширювати можливості програми за рахунок додаткових плагінів. 3D Studio MAX володіє всіма необхідними засобами для створення ігрових світів і анімаційних роликів і тому використовується більшістю розробників комп'ютерних ігор і незамінний в комп'ютерній мультиплікації і художньої анімації. Дизайнерам і інженерам 3D Studio MAX надає кошти фото реалістичної візуалізації для аналізу проекту, що розробляється, проведення презентацій та створення маркетингових матеріалів. Широко застосовується він в архітектурному проектуванні для створення дизайну інтер'єрів. Давно оцінили цю програму і фахівці з телевізійним заставок, кліпів і спецефектів у кіно, пакет широко застосовується при підготовці рекламних і науково-популярних роликів для телебачення.

*3D StudioMax* може використовуватися:

- ◆ в архітектурному проектуванні (рис.7.15);



Рисунок 7.15

- ◆ в підготовці рекламних і науково-популярних роликів для телебачення (рис.7.16);



Рисунок 7.16

- ◆ в комп'ютерній мультиплікації і художньої анімації (рис.7.17);



Рисунок 7.17

- ◆ в комп'ютерних іграх (рис. 7.18);



Рисунок 7.18

- ◆ в комп'ютерній графіці і Web-дизайні (рис.7.19).





Рисунок 7.19

### 7.3.6. Конструювання об'єктів з використанням пакета Maya

*Maya* можна назвати середовищем розробки інструментів для виробництва тривимірної комп'ютерної графіки. Чи не фіксованим набором засобів, а саме середовищем, в якій поряд з уже наявними величезними можливостями можна створювати нові інструменти і розробляти нові методи для отримання необхідних ефектів і результатів. MAYA не схожа на конкретний механізм з чітко визначеним набором функцій - це скоріше конструктор, що дозволяє комбінувати вже наявні працюють блоки в потрібній послідовності, а при необхідності легко створювати нові блоки. MAYA є, дійсно, сучасним набором інструментів, що увібрали в себе останні ідеї і технології комп'ютерної графіки. Засоби моделювання включають в себе кілька технологій. По-перше, це досить зручний набір інструментів для полігонального моделювання. По-друге,

Збереження ж історії моделювання дозволяє економити масу часу і не переробляти заново безліч операцій. Поверхні розбиття (Subdivision Surfaces) є симбіозом сплайнів і полігонів.

У Maya існує три типи поверхонь для моделювання:

- Polygons;
- NURBS;
- Subdivision surfaces.

Полігональні поверхні (Polygon surfaces) - це мережа з трьох або більше сторонніх поверхонь, які називаються гранями, які з'єднуються один з одним, створюючи полігональну сітку. Полігональна сітка складається з вершин, граней і ребер.

Коли полігональна сітка візуалізується, її ребра можуть бути встановлені жорсткими або згладженими. В результаті, полігони можуть з легкістю уявити як плоску, так і 3D форму.

Існують різні техніки по створенню полігональних моделей в MAYA:

Окрім полігони можуть бути створені за допомогою засобу Create Polygon Tool. Цей інструмент дозволяє розміщувати в сцені вершини, що визначають форму полігональної межі. Можливо також розрізати або екструдувати полігональну грань, щоб додати нові грані до вже створеної. Така техніка зазвичай використовується, якщо потрібно найточніше побудувати модель по заданому контуру.

Полігональні поверхні мають широкий спектр застосування для багатьох 3D додатків, включаючи інтерактивні ігри та програми, веб-розробки.

Термін «сплайни» означає параметричні криві та поверхні, які бувають різних типів. Найскладніший і гнучкий клас називається NURBS (non-uniform rational b-splines).



Слово «нерівномірні» (non-uniform) означає можливість нерівномірного параметризації уздовж протяжності поверхні, хоча в основному робота ведеться з рівномірними (uniform) сплайнами.

«Раціональні» (rational) - означає, що контрольні точки можуть мати різні ваги і притягувати до себе поверхню по-різному, хоча знову ж таки, за замовчуванням робота в MAYA ведеться з нераціональними поверхнями і кривими, ваги точок у яких однакові.

NURBS криві і поверхні мають безліч застосувань і бажаних типів поверхонь для індустріальних та автомобільних дизайнерів, де необхідні згладжені форми з мінімальною кількістю даних для визначення конкретних форм. NURBS криві ідеальні для визначення згладжених шляхів руху для анімованих об'єктів. NURBS поверхні можуть бути змодельовані і потім сконвертовані в полігональну сітку.

Subdivision surface (поверхні з розбивкою) - це гладка поверхня, яка генерується за довільною полігональною сітці. SubDs поверхні містять кращі характеристики NURBS і полігональних об'єктів.

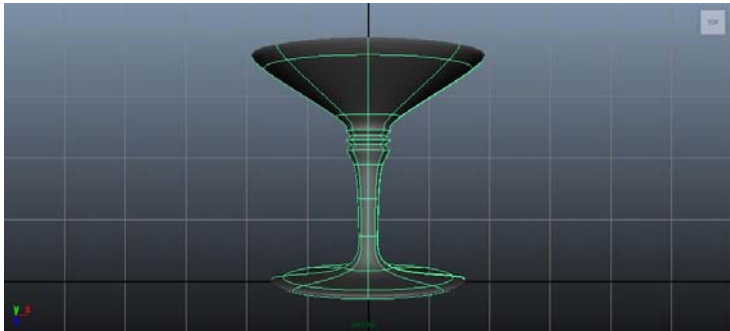


Рисунок 7.20 - NURBS об'єкт

MAYA дозволяє конвертувати один вид поверхні в інший, тобто NURBS можна перетворити в полігональні і Subdivision поверхні. Точно також полігональні і Subdivision - поверхні можна перетворити в інший вид поверхні.

Промислові дизайнери відразу оцінили можливості швидкого та якісного візуалізації, доступні в MAYA.

Можливості виразного органічного моделювання та наочної візуалізації зробили MAYA привабливою і для медицини.

Список можна продовжувати, бо завдяки відкритості MAYA області її застосування досить широкі.

До речі, банальний факт використання MAYA в індустрії комп'ютерних ігор можна доповнити нетривіальним варіантом використання MAYA як цікавої, красивою, (і тривимірної!) Комп'ютерної гри з безліччю рівнів.

### **7.3.7. Конструювання об'єктів з використанням пакета Solid Works**

*Solid Works* — система автоматизованого проектування, інженерного аналізу та підготовки виробництва виробів будь-якої складності і призначення. *Solid Works* є ядром інтегрованого комплексу автоматизації підприємства, за допомогою якого здійснюється підтримка життєвого циклу виробу відповідно до концепції CALS-технологій, включаючи двонаправлений обмін даними з іншими Windows-додатками і створення інтерактивної документації.

Розробки *SolidWorks Corp.* характеризуються високими показниками якості, надійності і продуктивності, що в поєднанні з кваліфікованою підтримкою робить

SolidWorks кращим рішенням для промисловості.

Комплексні рішення *Solid Works* базуються на передових технологіях гібридного параметричного моделювання і широкому спектрі спеціалізованих модулів. Програмне забезпечення функціонує на платформі Windows XP, виконано російською мовою, підтримує ГОСТ і ЕСКД.

Найголовніше, що дає конструктору Solid Works, - це можливість працювати так, як він звик, що не підлаштовуючись під особливості використовуваної комп'ютерної системи.

Користувачеві надаються кілька різних засобів створення об'ємних моделей. Основними формотворчими операціями в SolidWorks є команди додавання і зняття матеріалу. Система дозволяє видавлювати контур з різними кінцевими умовами, в тому числі на задану довжину або до зазначеної поверхні, а також обертати контур навколо заданої осі. Можливе створення тіла по заданим контурам з використанням декількох утворюють кривих (так звана операція лофтинга) і видавлюванням контуру уздовж заданої траєкторії. Крім того, в SolidWorks надзвичайно легко будуються ливарні ухили на обраних гранях моделі, порожнини в твердих тілах із завданням різних товщин для різних граней, скруглення постійного і змінного радіуса, фаски і отвори складної форми.

Важливою характеристикою системи є можливість отримання розгорток для спроектованих деталей з листового матеріалу. При необхідності в модель, що знаходиться в розгорнутому стані, можуть бути додані нові місця згину і різні конструктивні елементи, які з яких-небудь причин не можна було створити раніше.

При проектуванні деталей, виготовлених литтям, дуже корисною виявляється можливість створення різних ливарних форм. Якщо для роботи необхідно використовувати будь-які часто повторюються конструктивні елементи, на допомогу приходить здатність системи зберігати примітиви у вигляді бібліотечних елементів.

Крім проектування твердотільних моделей, SolidWorks підтримує і можливість поверхового уявлення об'єктів. При роботі з поверхнями використовуються ті ж основні способи, що і при роботі з твердими тілами. Можливо побудова поверхонь, еквідистанти, а також імпорт поверхонь з інших систем з використанням формату IGES.

Значно спрощують роботу численні сервісні можливості, такі як копіювання вибраних конструктивних елементів по лінії або по колу, дзеркальне відображення як зазначених примітивів чи моделлю.

При редагуванні конструктор може повернути модель в стан, що передувала створенню вибраного елемента. Це може знадобитися для виконання будь-яких дій, неможливих в поточний момент.

*SolidWorks* містить високоефективні средства твердотельного моделювання, основою яких є поступове додавання або видалення базового чи пошкодити тел. Ескіз для отримання базового тела може бути побудований на довільно робочей площині.

Крім створення твердих тел, в SolidWorks існує можливість побудови різних поверхностей, якому можуть бути використані як для допоміжних побудов, так і самостійно. Поверхності можуть бути імпортовані з будь-якої зовнішньої системи або побудовані тими ж способами, що і тверді тела (видавлення, вращення, переход між контурами і т.п.). Допускається отримання слепка будь-якої з поверхностей вже побудованого твердого тела.

Режими візуалізації отриманої моделі дозволяють просувати її каркасний або реалістичний зображення. Для підвищення якості тонування зображень можуть бути змінені фізичні характеристики поверхності деталей (текстури) та призначені додаткові джерела світла.

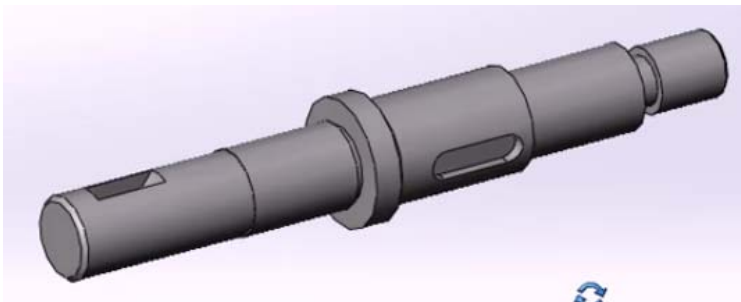


Рисунок 7.21

### 7.3.8. Конструювання об'єктів з використанням пакета AutoCAD

Системи графічного моделювання - пакети, пов'язані з побудовою і розробкою моделей графічних образів.

*AutoCAD*- це дво- і тривимірна система автоматизованого проектування і креслення (САПР), розроблена компанією Autodesk. Графічна система AutoCAD (Автоматизоване комп'ютерне креслення і проектування) — практично світовий стандарт в області систем автоматизованого проектування для персональних комп'ютерів. Стандарти AutoCAD підтримують величезну кількість незалежних розробників, які створили понад 5000 спеціалізованих додатків для AutoCAD у всіх прикладних областях. AutoCAD застосовується практично у всіх галузях промисловості і будівництва, так як останнім часом замовники стали пред'являти вимоги до проектувальників з випуску документації в електронному вигляді. AutoCAD відноситься до класу програм CAD (Computer Aided Design), які призначені, в першу чергу, для розробки конструкторської документації: креслень,

Програма дозволяє будувати 2D і 3D креслення будь-яких призначення і складності з максимальною точністю. Швидкість і легкість, з якими створюються тривимірні моделі проєктованих виробів, широкі можливості їх перетворення і редагування, різні способи отримання плоских зображень цих виробів (видів, розрізів, перерізів), асоціативно пов'язаних з моделями, — все це забезпечує величезну економію часу в порівнянні з «ручним»кресленням.

Сучасний пакет AutoCAD дозволяє працювати одночасно з декількома кресленнями, має потужні засоби візуалізації створюваних тривимірних об'єктів і розширені можливості адаптації системи до вимог користувача, забезпечує зв'язок графічних об'єктів із зовнішніми базами даних, дозволяє переглядати і копіювати компоненти креслення без відкриття його файлу, редагувати зовнішні посилання і блоки, що знаходяться в зовнішніх файлах.

У нещодавно вийшла версії AutoCAD з'явилися нові інструменти: вдосконалений інтерфейс, поліпшені онлайн-карти, синхронізація креслень, пакет інструментів для креслення, попередній перегляд команд, галереї стрічки.

*AutoCAD* і спеціалізовані додатки на його основі знайшли широке застосування в машинобудуванні, будівництві, архітектурі та інших галузях промисловості.

Спеціалізовані додатки на основі AutoCAD:

- AutoCAD Architecture - версія, орієнтована на архітекторів і містить спеціальні додаткові інструменти для архітектурного проектування і креслення, а також кошти випуску будівельної документації.
- AutoCAD Electrical розроблений для проектувальників електричних систем управління і відрізняється високим рівнем автоматизації стандартних завдань і наявністю великих бібліотек умовних позначень.
- AutoCAD Civil 3D- рішення для проектування об'єктів інфраструктури,

призначене для землепорядників, проектувальників генплану і проектувальників лінійних споруд. Крім основних можливостей, AutoCAD Civil 3D може виконувати такі види робіт, як геопросторовий аналіз для вибору підходящої будмайданчика, аналіз зливових стоків для забезпечення дотримання екологічних норм, складання кошторису і динамічний розрахунок обсягів земляних робіт.

- AutoCAD MEPорієнтований на проектування інженерних систем об'єктів цивільного будівництва: систем сантехніки і каналізації, опалення та вентиляції, електрики і пожежної безпеки. Реалізована побудова тривимірної параметричної моделі, отримання креслень і специфікацій на її основі.
- AutoCAD Map 3D створений для фахівців, що виконують проекти в сфері транспортного будівництва, енергопостачання, земле- і водокористування та дозволяє створювати, обробляти і аналізувати проектну та ГІС-інформацію.
- AutoCAD Raster Design - програма векторизації зображень, що підтримує оптичне розпізнавання символів (OCR).
- AutoCAD Structural Detailing- засіб для проектування і розрахунку сталевих та залізобетонних конструкцій, що підтримує технологію інформаційного моделювання будівель. Базовими об'єктами є балки, колони, пластини і арматурні стержні і ін.
- AutoCAD Ecsad дозволяє інженерам-електрикам створювати схеми електротехнічного обладнання за допомогою сценаріїв і бібліотек умовних позначень.
- AutoCAD Mechanical призначений для проектування в машинобудуванні і відрізняється наявністю бібліотек стандартних компонентів (понад 700 тисяч елементів), генераторів компонентів і розрахункових модулів, засобів автоматизації завдань проектування і складання документації, можливістю спільної роботи.
- AutoCAD P & ID — це програма для створення і редагування схем трубопроводів і КВП, а також для управління ними.
- AutoCAD Plant 3D- інструмент для проектування технологічних об'єктів. В AutoCAD Plant 3D інтегрований AutoCAD P & ID.

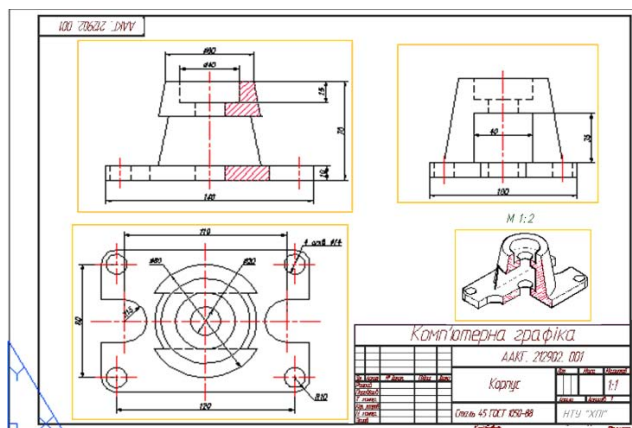
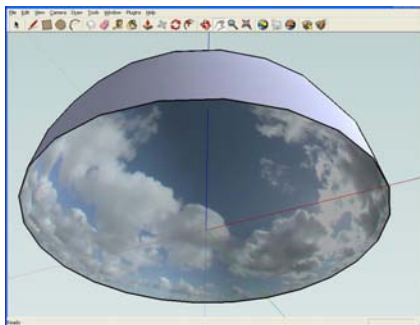


Рисунок 7.22

### 7.3.9. Конструювання об'єктів з використанням пакета GoogleSketchUp

**Google SketchUp**(Windows і Mac) - є простим у використанні додатком, яке допоможе вам навчитися створювати 3D-моделі житлових будинків, ангарів, гаражів, дахів, різних прибудов до будинків і навіть космічних кораблей.С допомогою SketchUp можна легко додавати деталі, змінювати текстури, розміри ваших моделей, промислових об'єктів з величезною точністю, а також розміщувати готові моделі на сервісі Google Earth, ділитися ними з іншими людьми, розмістивши на сайті 3D Warehouse або роздрукувавши копії. Google SketchUp це відмінний спосіб дізнатися, чи подобається вам 3D-моделювання.

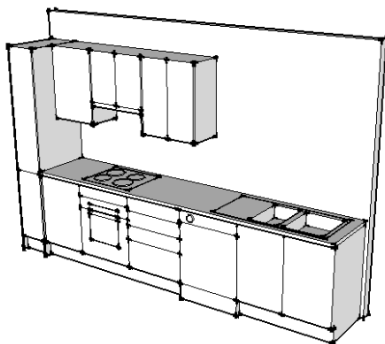


*SketchUp*включає наступні інструменти:

- Малювання і геометричне моделювання: Polygon (Багатокутник), FollowMe (інструмент для створення простих і складних форм - кіл, овалів, квадратів, Offset (інструмент для побудови пропорційних зменшених копій об'єкта) і Intersect with Model;
- Конструювання: Dimension (Розміри), Tape Measure (Активізація вимірювальної рулетки), Protractor (Включення транспортира), Section Slice (Вибір частинами), Layers (Шари), Area & Length Calculation (Розрахунок площі і довжини).

*Програма SketchUp* дозволяє:

- Малювати, редагувати, вимірювати, обертати і масштабувати геометричні фігури;



- Ділити 3D-модель на секції для перегляду і обробки внутрішніх деталей;
- Застосовувати до моделі готові текстури або створювати нові;

- Додавати до своєї моделі готові компоненти, такі як дерева, автомобілі, вікна, двері, людей або створювати нові;
- Ретушувати, пом'якшувати риси обличчя;
- Моделювати тіні від об'єктів в реальному часі для будь-якої точки земної кулі;
- Імітувати розміщення відеокамер;
- Здійснювати веб-екскурсії;
- Створювати екскурсії - презентації;
- Експортувати двомірні графічні файли (. JPG ., PNG, . TIF. TGA. BMP) в 3D-моделей (0,3 DS. Дем. DDF. DWG. DXF. СКП);
- Експортувати двомірні зображення своїх моделей (. JPG ., BMP ., PNG ., TIF);
- Роздруковувати зображення моделей;
- Займатися розробкою додаткових додатків для програми за допомогою мови Ruby.

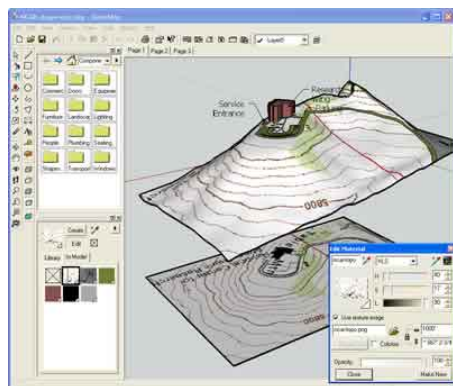


Рисунок 7.23

**SketchUp**-інструмент 3D-моделювання для професійних дизайнерів: професійна версія SketchUp дає професійним дизайнерам можливості розробки і аналізу складних дизайнерських об'єктів.

***SketchUp**-користувачі можуть:*

- Експортувати моделі в форматах 3DS, DWG, DXF, OBJ, XSI, VRML і FBX;
- Експортувати анімацію і покрокові керівництва в файлах MOV і AVI;
- Використовувати моделювання органічних об'єктів (Sandbox) і інструменти Film & Stage;
- Імпортувати і експортувати GIS -Дані;
- Роздруковувати і експортувати растрові зображення з роздільною здатністю вище, ніж на дисплеї;
- Отримувати безкоштовну технічного підтримку протягом двох років після придбання програми;
- Використовувати програмне забезпечення в комерційних цілях (безкоштовна версія - тільки для особистого використання).

Моделюйте все, що тільки можете уявити: ремонт у вашій вітальні, придумайте нові предмети меблів, створюйте об'ємні моделі міст для сервісу Google Earth. Можливості SketchUp безграничні.

**SketchUp** перетворює 3D-моделювання в задоволення: потужне, високоякісне програмне забезпечення також має здатність приносити задоволення у використанні - секрет в тому, що інструменти і можливості SketchUp інтуїтивно зрозумілі, вони працюють так, як ви очікуєте.

### 7.3.10. Конструювання об'єктів з використанням пакета Компас

«Компас» — сімейство систем автоматизованого проектування з можливостями оформлення проектної та конструкторської документації відповідно до стандартів серії ЕСКД і СПДС. Розробляється російською компанією «Аскон». Назва лінійки є акронімом від фрази «комплексу автоматизованої Систем», в торгових марках використовується написання великими літерами. Перший випуск «Компаса» (версія 1.0) відбувся в 1989 році. Перша версія під Windows - «Компас 5.0» — вийшла в 1997 році.

Програми даного сімейства автоматично генерують асоціативні види тривимірних моделей (в тому числі розрізи, перерізи, місцеві розрізи, місцеві види, види по стрілці, види з розривом). Всі вони асоційовані з моделлю: зміни в моделі призводять до зміни зображення на кресленні. Стандартні види автоматично будуються в проекційній зв'язку. Дані в основному написі креслення (позначення, найменування, маса) синхронізуються з даними з тривимірною моделлю. Є можливість зв'язку тривимірних моделей і креслень зі специфікаціями, тобто при «належному» проектуванні специфікація може бути отримана автоматично; крім того, зміни в кресленні або моделі будуть передаватися в специфікацію, і навпаки.

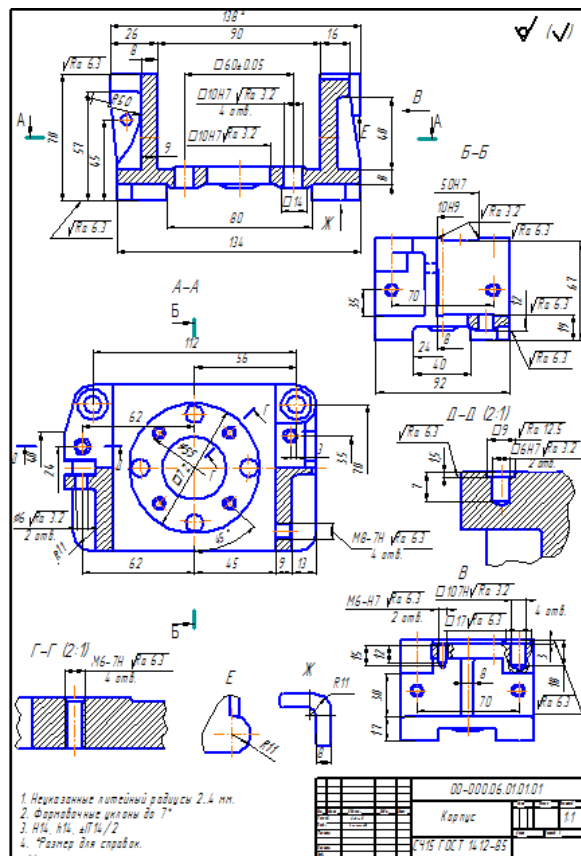


Рисунок 7.24

### Контрольні питання

1. У чому полягають переваги та недоліки векторної графіки, у порівнянні з піксельною графікою?
2. Чи відбудеться погіршення чіткості векторного зображення при збільшенні його розміру?
3. Для чого служить Status Bar (Рядок стану)?
4. Які варіанти дій призводять до виділення декількох об'єктів?
5. Які існують типи вузлів на кривій Безьє?
6. Що входить в предметну область комп'ютерної графіки?
7. Для яких цілей служать графічні редактори?
8. Що розуміється під терміном "редагування зображень"?
9. Як співвідносяться предмети комп'ютерної графіки та анімації?
10. Як і в яких галузях використовується ділова графіка?
11. Назвіть головні елементи інтерфейсу КОМПАС-3D.
12. Поясніть призначення клавіатурних прив'язок
13. Що таке «графічне моделювання»?
14. Які є види графічного моделювання?
15. Які завдання виконує графічне моделювання?
16. Чим відрізняються стартові вікна в програмі SketchUp?
17. Компоненти графічних систем.
18. Способи створення геометричних моделей.
19. Геометричні моделі зберігання і візуалізації.
20. Типи геометричних моделей.
21. Види найпростіших геометричних елементів і основні способи їх створення. Створення геометричних елементів з використанням відносин (загальний і приватний способи). Створення геометричних елементів за допомогою перетворення.
22. Що на увазі тип копіювання «Instance»
23. Способи моделювання в програмному пакеті 3DSMax
24. Види графічного моделювання
25. Класифікація систем графічного моделювання
26. Сфери використання систем графічного моделювання
27. Що розуміється під терміном "редагування зображень"
28. Як співвідносяться предмети комп'ютерної графіки та анімації
29. Для яких цілей служать графічні редактори
30. Базові відмінності повного пакету Компас 3D від інших комплектацій
31. Класифікація систем графічного моделювання
32. Сфери використання систем графічного моделювання
33. Для яких цілей служать графічні редактори
34. Що входить в предметну область комп'ютерної графіки
35. З якими форматами працює SketchUp?
36. Які інструменти потрібні для створення об'єктів



## Список джерел інформації

1. Адашевская И. Ю. Информационные системы конструирования и моделирования объектов : Навчальн. посібник / И. Ю. Адашевская. — Харків: «НТМТ», 2016. — 200 с.
2. Геометрическое моделирование в компьютерной графике : Навчальн. посібник / И. А. Чермных, А. Г. Журило, Е. А. Краевская, И. Ю. Адашевская. — Харків: «НТМТ», 2017. — 316 с
3. Мохрачева Л. П. Типовые математические схемы моделирования. Примеры и задачи : уч. пособие / Л. П. Мохрачева. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. — 144 с